函数论初步

周丽珍　易中　编著

冶金工业出版社

ISBN 978-7-5024-4758-8

9 787502 447588 >

定价 29.00 元

销售分类建议：数学

函数论初步

周丽珍　易　中　编著

北　京
冶　金　工　业　出　版　社
2009

内 容 简 介

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数 11 个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书，也可以供有关专业的工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

函数论初步/周丽珍等编著. —北京：冶金工业出版社，2009.1

ISBN 978-7-5024-4758-8

Ⅰ. 函… Ⅱ. 周… Ⅲ. 函数论 Ⅳ. O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 209752 号

出 版 人 曹胜利

地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009

电　　话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn

策划编辑 张 卫 责任编辑 王雪涛 美术编辑 李 心

版式设计 张 青 责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-4758-8

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2009 年 1 月第 1 版，2009 年 1 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32；9.125 印张；244 千字；282 页；1-2000 册

29.00 元

冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893

冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号(100711) 电话：(010)65289081

(本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换)

前　言

函数论是数学的基本组成部分，属于数学分析的范畴，包括单复变函数、级数理论、广义函数、多复变函数等分支。这些内容既相对独立又相互联系，读者可以从中初步了解函数论的概貌。由于篇幅所限，书中所述的分支内容只能是“片段性”的，读者可以根据具体的需要选择阅读。

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数 11 个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书，也可以供有关专业的工程技术人员使用。

限于作者的水平，书中有不妥之处，恳请读者不吝赐教。

作　者

目　　录

1 整函数和亚纯函数

1.1 无穷乘积

1.1.1 无穷乘积的收敛性

设a_1、a_2、…、a_l、…为复数序列，称

$$\prod_{l=1}^{\infty} a_l = a_1 a_2 \cdots a_l \cdots \tag{1.1}$$

为无穷乘积，a_l称为第l个因子。取

$$p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

称p_n为部分乘积。命a_l不为零，若$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$存在且等于$p(p\neq 0)$，则称式(1.1)收敛于$p$，$p$称为无穷乘积的值，记作$p=\prod\limits_{l=1}^{\infty} a_l$；若$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$不存在或$p=0$，则称式(1.1)发散。

也可以用ε语言表述无穷乘积的收敛性。式(1.1)收敛于p是指任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$l>N$时有

$$\left|\frac{p}{p_l}-1\right|<\varepsilon$$

因为$a_l=\dfrac{p_l}{p_{l-1}}$，若无穷乘积收敛，则当$l\to\infty$时$a_l\to 1$。这是无穷乘积收敛的必要条件，但非充分条件。

为方便讨论，一般将无穷乘积写成如下形式

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+a_l) \tag{1.2}$$

式(1.2)收敛的必要条件为$a_l\to 0$。

对式(1.2)与其相应的级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l) \qquad (1+a_l\neq 0) \tag{1.3}$$

进行比较，其中每一项选取对数主值。

定理 1.1 无穷乘积式(1.2)收敛的充要条件为无穷级数式(1.3)收敛。

证明:(1) 充分性。令

$$q_n = \sum_{l=1}^{n} \log(1 + a_l)$$

推出

$$p_n = e^{q_n}$$

由于式(1.3)收敛,即 $q_n \to q$,注意到指数函数的连续性,因此 $p_n \to e^q$。

(2) 必要性。令

$$p_n = \rho_n e^{i\varphi_n} \quad 且\ 1 + a_l = r_l e^{i\theta_l} \qquad (-\pi < \theta_l \leqslant \pi)$$

于是

$$\varphi_n = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n \qquad \rho_n = r_1 r_2 \cdots r_n$$

而无穷乘积收敛,这样 ρ_n、$e^{i\varphi_n}$ 都趋近于不为零的极限。设

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = R \qquad \lim_{n\to\infty} e^{i\varphi_n} = e^{i\varphi} \tag{1.4}$$

所以任给 $\varepsilon > 0$,必存在正整数 N,当 $n > N$ 时

$$\varphi_n = \varphi + 2k_n\pi + \varepsilon_n \tag{1.5}$$

式中 $|\varepsilon_n| < \varepsilon$。依式(1.5)

$$\theta_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} = 2\pi(k_n - k_{n-1}) + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$$

取 $\Delta k = k_n - k_{n-1}$、$\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$,则 Δk 为整数,$|\Delta\varepsilon| < 2\varepsilon$,得

$$\theta_n = 2\Delta k\pi + \Delta\varepsilon$$

因 $-\pi < \theta_n \leqslant \pi$,故当 ε 很小时,必应 $\Delta k = 0$,也就是当 n 充分大时所有 k_n 相等,$k_n = k$,且

$$\varphi_n = \varphi + 2k\pi + \varepsilon_n$$

又

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi + 2k\pi$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log R + i(\varphi + 2k\pi)$$

表明上式等号左端收敛。

如果无穷级数 $\sum_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$绝对收敛，那么称无穷乘积 $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ 绝对收敛。

定理1.2 无穷乘积 $\prod_{l=1}^{\infty}(1+a_l)$ 绝对收敛的充要条件为无穷级数 $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ 绝对收敛。

证明：只需证明 $\sum_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$与 $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ 同时绝对收敛即可。因为两个级数至少有一个收敛，所以当$l\to\infty$时$a_l\to 0$。这样存在整数N，当$n\geqslant N$ 时$|a_l|\leqslant\frac{1}{2}$，有

$$\left|\frac{\log(1+a_l)}{a_l}-1\right|=\left|-\frac{a_l}{2}+\frac{a_l^2}{3}-\frac{a_l^3}{4}+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{2}$$

得

$$\frac{1}{2}|a_l|\leqslant|\log(1+a_l)|\leqslant\frac{3}{2}|a_l|$$

故 $\sum_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$与 $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ 同时绝对收敛。

1.1.2 函数项的无穷乘积

设$u_l=u_l(z)$，今考虑函数项的无穷乘积

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+u_l) \qquad (1.6)$$

式中u_1、u_2、…为定义在点集E上的函数。取

$f_n(z)=\prod_{l=1}^{\infty}[1+u_l(z)]$，若函数序列$\{f_n(z)\}$在点集$E$上的任意一点$z$均收敛于非零值，则称式(1.6)在$E$上一致收敛。

定理1.3 若 $\prod_{l=1}^{\infty}(1+u_l)$ 满足

$$|u_l|<M_l \qquad (l=1,2,\cdots;z\in E)$$

式中M_l与z无关，且$\sum_{l=1}^{\infty}M_l$收敛，则$\prod_{l=1}^{\infty}(1+u_l)$在$E$上一致收敛。

定理1.3也称为维尔斯特拉斯判别法。

证明：命$p_n=\prod_{l=1}^{n}(1+M_l)$，$f_n(z)=\prod_{l=1}^{n}(1+u_l)$。因为$\sum_{l=1}^{\infty}M_l$收敛，由定理1.2知$\prod_{l=1}^{\infty}(1+M_l)$也收敛，所以当$n\to\infty$时$p_n$存在极限。而对$n>m$，

$$f_n(z)=f_m(z)\prod_{l=m+1}^{n}[1+u_l(z)]$$

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f_m(z)|&=|f_m(z)|\left|\prod_{l=m+1}^{n}[1+u_l(z)]-1\right|\\&\leqslant\prod_{l=1}^{m}(1+M_l)\left[\prod_{l=m+1}^{n}(1+M_l)-1\right]=p_n-p_m\end{aligned}$$

由于$\{p_n\}$存在极限，利用柯西准则，对任给$\varepsilon>0$，必存在m，使当$n>m$时

$$0<p_n-p_m<\varepsilon$$

也就是对$n>m$及对E中的一切点z，均有

$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

故$\{f_n(z)\}$在E上一致收敛，表明式(1.6)在E上一致收敛。

定理1.4 设$\prod_{l=1}^{\infty}[1+u_l(z)]$在区域$D$内任意一个有界闭区域上一致收敛于$f(z)$，且每一个$u_l(z)$在$D$内解析，则$f(z)$在$D$内解析。

【例1.1】 讨论无穷乘积

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

的收敛性。

解：因为$\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$绝对收敛，所以该无穷乘积绝对收敛。

【例1.2】 讨论无穷乘积

$$\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots$$

的收敛性。

解：因为$\frac{|z|}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以当$z\neq 0$时发散，这样该无穷乘积非绝对收敛。

1.1.3 Poisson-Jensen 公式

首先给出全纯函数的概念。函数$f(z)$在点a上全纯是指其在点a的某个邻域内可以展开成关于$z-a$的幂级数；函数在某点上的全纯性等价于其在该点上的解析性。如果一个函数在某区域内的每一点都是全纯的，那么称之为在该区域是全纯的。

当$f(z)$在整个复平面上除可能有极点外处处解析时称$f(z)$为亚纯函数；当$f(z)$在整个复平面上解析时称$f(z)$为整函数。显然整函数是亚纯函数的特例。整函数可以作为多项式的推广，亚纯函数可以作为部分分式的推广。有理函数属于亚纯函数，而非有理函数称为超越亚纯函数。

在讨论整函数与亚纯函数时经常应用 Jensen 公式、Poisson-Jensen 公式，尤其是在亚纯函数中 Poisson-Jensen 公式的作用更大。

定理1.5 设$f(z)$在圆$|z|\leqslant\rho$上亚纯，a_p、b_q分别为$f(z)$在圆$|z|<\rho$内的零点和极点，则对任意值$z=re^{i\theta}$($0\leqslant r<\rho$、$0\leqslant\theta<2\pi$)有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi+\sum_{p=1}^{n}\log\left|\frac{\rho(z-a_p)}{\rho^2-\overline{a}_p z}\right|-\sum_{q=1}^{m}\log\left|\frac{\rho(z-b_q)}{\rho^2-\overline{b}_q z}\right| \tag{1.7}$$

而$p=1$、2、$\cdots$、n；$q=1$、2、$\cdots$、m。

证明：(1) 设$f(z)$在$|z|\leqslant\rho$上无零点、极点，于是对任意取定

的一个点 $z_0=r_0e_0^{i\theta}(0\leqslant r_0<\rho,0\leqslant\theta_0<2\pi)$，函数

$$\frac{\rho^2-|z_0|^2}{\rho^2-\bar{z}_0z}\log f(z)$$

在 $|z|\leqslant\rho$ 上全纯。根据柯西公式，得

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{\rho^2-|z_0|^2}{(\rho^2-\bar{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)}\log f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad (1.8)$$

在 $|\zeta|=\rho$ 上，若记 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$，则 $\mathrm{d}\zeta=i\rho e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$ 且

$$(\rho^2-\bar{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)=\rho e^{i\varphi}[\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta-\varphi)+r_0^2]$$

这样由式(1.2)给出

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r_0^2}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}\log f(\rho e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

在上式等号两边取实部，有

$$\log|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r_0^2}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$

注意到点 z_0 的任意性，表明式(1.7)成立，称式(1.7)为 Poisson-Jensen 公式。

(2) 如果仅仅假设 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内无零点、极点，但在 $|z|=\rho$ 上可能存在有限个零点、极点，那么仍可以证明式(1.7)成立。事实上，此时式(1.8)中的被积函数仅具有对数奇性，因而积分仍有意义。在每个零点和极点处，只需对积分线圆周 $|\zeta|=\rho$ 作改动并通过极限过程就可证明式(1.8)成立，进而式(1.7)也成立。

(3) 今考虑一般情况，令

$$\psi(z)=f(z)\frac{\prod\limits_{q=1}^{m}\frac{\rho(z-b_q)}{\rho^2-\bar{b}_qz}}{\prod\limits_{p=1}^{n}\frac{\rho(z-a_p)}{\rho^2-\bar{a}_pz}} \quad (1.9)$$

所以 $\psi(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内全纯又无零点。对 $\psi(z)$ 应用式(1.7)，当 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$、$|a|<1$ 时，

$$\left|\frac{\rho(\zeta-a)}{\rho^2-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{\rho e^{i\varphi}-a}{\rho-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=\left|\frac{\rho-ae^{-i\varphi}}{\rho-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=1$$

于是

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) + r^2}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$

再利用式(1.9)，即得式(1.7)。

当$f(0)\neq 0$、∞时，若式(1.7)中取$z=0$，则

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi - \sum_{p=1}^{n}\log\frac{\rho}{|a_p|} + \sum_{q=1}^{m}\log\frac{\rho}{|b_q|} \tag{1.10}$$

式(1.10)称为Jensen 公式。

1.2 整函数

1.2.1 整函数的级与型

由整函数$f(z)$的定义知，$f(z)$可用幂级数表示

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{1.11}$$

利用柯西公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \tag{1.12}$$

首先在无穷远点处整函数可能是解析的，这样$f(z)$为一个常数；其次无穷远点可能是$l\geqslant 1$重的极点，这样$f(z)$为l次多项式；最后无穷远点可能是$f(z)$的本性奇点，这时的$f(z)$称为超越整函数，如指数函数、三角函数等。

对于超越整函数，其最大模

$$M(r) = \max_{|z|<r}|f(z)|$$

是此类函数最重要的特征。因r为增函数，依刘维尔定理知它满足

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty \tag{1.13}$$

就超越整函数而言，$M(r)$比r的任何固定次幂增长得更快。另外，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r} = \infty \tag{1.14}$$

是正确的。事实上，若设

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=\mu<\infty$$

则对有限数 $\mu_0>\mu$，存在趋近于无穷大的序列 $\{r_n\}$，使对每一个 r_n 下式成立，

$$\log M(r_n)<\mu_0\log r_n$$

或

$$M(r_n)<r_n^{\mu_0}$$

于是利用柯西不等式，式(1.11)的系数满足

$$|a_l|\leqslant\frac{M(r_n)}{r_n^l}<r_n^{\mu_0-l}$$

因为此处 r_n 可取任意大值，所以对所有 $l>\mu_0>\mu$，泰勒级数的系数 a_l 全为零，结果 $f(z)$ 为多项式，其次数不高于 μ 的最大整数部分(即 $[\mu]$)。

今用指数函数估计超越整函数的增长。若存在 $\mu>0$ 使对一切充分大的 r，不等式

$$M(r)<\exp(r^\mu) \tag{1.15}$$

正确，则 $f(z)$ 称为有限级整函数。反之，对 $\mu>0$ 恒有适当的 r 使 $M(r)>\exp(r^\mu)$，则 $f(z)$ 称为无穷级整函数。

【例 1.3】 $\exp(z)$ 为有限级整函数，$\exp[\exp(z)]$ 为无穷级整函数。

对有限级整函数，考虑 μ 的下确界；对这些 μ，从充分大的 $r>r(\mu)$ 开始式(1.15)成立，该下确界称为整函数的级，也就是增长的级，并以 ρ 表示，

$$\rho=\inf\mu\geqslant0$$

对无穷级整函数，令 $\rho=\infty$，依定义，对 $\varepsilon>0$，不等式

$$M(r)<\exp(r^{\rho+\varepsilon}) \tag{1.16}$$

也正确。另一方面，存在 r_1、r_2、…、r_n、…满足

$$M(r_n)>\exp(r_n^{\rho-\varepsilon}) \tag{1.17}$$

从式(1.16)、式(1.17)可推出

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}<\rho+\varepsilon$$

对适当值 r_n

$$\frac{\log\log M(r_n)}{\log r_n}>\rho-\varepsilon$$

有

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r} \tag{1.18}$$

式(1.18)可作为整函数级的定义。

若 $f(z)$ 具有有限级 ρ 且存在 $K>0$,使

$$M(r)<\exp(Kr^{\rho}) \tag{1.19}$$

则称 $f(z)$ 为有限型整函数。反之,对 $K>0$,恒存在适当值 r 使 $M(r)>\exp(Kr^{\rho})$,这样 ρ 级整函数称为最大型(或无穷型)整函数。

对所有充分大的 r,式(1.19)均成立的 K 的下确称为整函数的型。并以 σ 表示,

$$\sigma=\inf K\geqslant 0$$

在有限型整函数中将区分有限型整函数($\sigma>0$)和最小型整函数($\sigma=0$)。对最大型整函数($\sigma=\infty$),根据定义,对 $\varepsilon>0$,

$$M(r)<\exp[(\sigma+\varepsilon)r_n^{\rho}] \tag{1.20}$$

也正确。另一方面,存在 r_1、r_2、…、r_n、…满足

$$M(r)>\exp[(\sigma-\varepsilon)r_n^{\rho}] \tag{1.21}$$

从式(1.20)、式(1.21)推出

$$\frac{\log M(r)}{r^{\rho}}<\sigma+\varepsilon$$

对适当值 r_n

$$\frac{\log M(r_n)}{r^{\rho}}>\sigma-\varepsilon$$

因此

$$\sigma=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M(r)}{r^{\rho}} \tag{1.22}$$

式(1.22)可作为整函数型的定义。

【例 1.4】 e^z 为级 $\rho=1$ 和型 $\sigma=1$ 的整函数。

现以式(1.11)的系数表达整函数的级、型。设 $f(z)$ 为有限级

整函数，于是

$$M(r)<\exp(Kr^{\mu}) \tag{1.23}$$

这时$\mu>\rho$；但对于ρ级和σ型的整函数，$\mu=\rho$、$K>\sigma$，因而利用幂级数系数的柯西不等式，得

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}<\frac{\exp(Kr^{\mu})}{r^n}$$

令$N=N(K,\mu)$，当$n>N$时

$$|a_n|<\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} \tag{1.24}$$

式(1.24)为式(1.23)的推论。注意到当$n\to\infty$时$\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$，有$\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\to\infty$。再由式(1.23)，得

$$\mu>\frac{\log n}{\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}+\frac{\log\frac{1}{e\mu K}}{\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.25}$$

故

$$\mu\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

因为可取任何大于ρ的数当作μ，所以

$$\rho\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.26}$$

进而对有限级ρ的整函数，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\alpha \tag{1.27}$$

也是有限的且不超过ρ。进一步假定$f(z)$为有限型σ的整函数，在式(1.23)中命$\mu=\rho$，并能取任何大于σ的数作为K，由此从式(1.24)导出

$$n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}<(e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant(e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

由于可取任何大于σ的值替代K,因此

$$(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}\tag{1.28}$$

对级ρ、型σ的整函数,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}=\beta\tag{1.29}$$

也是有限的并不超过$(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$。可以证明式(1.24)、式(1.28)中的不等号不成立,这样恒有

$$\alpha=\rho\qquad\qquad\beta=(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$$

今估计$M(r)$。按

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|=\max_{|z|=r}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$$
$$=\sum_{n=0}^{n_0(r)}|a_n|r^n+\sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty}|a_n|r^n$$

式中$n_0(r)=2^{\mu}e\mu Kr^{\mu}>N=N(K,\mu)$。另,

$$M(r)<\sum_{n=0}^{n_0(r)}|a_n|r^n+\sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\sum_{n=0}^{n_0(r)}|a_n|r^n+1$$

$$\sum_{n=0}^{n_0(r)}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{N}|a_n|r^n+\sum_{n=N+1}^{n_0(r)}|a_n|r^n<r^N\sum_{n=0}^{N}|a_n|+$$
$$[n_0(r)-N]\max_k|a_k|r^k$$

其中$k=N+1,\cdots,n_0(r)$。又$\max\limits_{N+1\leqslant n\leqslant n_0(r)}|a_n|r^n\leqslant\max\limits_{N+1\leqslant n}|a_n|r^n$,当$n\geqslant N+1$时式(1.24)成立。故

$$\max_{N+1\leqslant n\leqslant n_0(r)}|a_n|r^n\leqslant\max_{N+1\leqslant n}\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}\leqslant\max_{1\leqslant n}\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}r^n$$

对$\max\limits_{1\leqslant n}\left(\frac{e\mu K}{l}\right)^{\frac{n}{\mu}}r^n$,在$n=\mu Kr^n$处达到,为$\exp(Kr^{\mu})$,于是

$$\max_{N+1\leqslant n\leqslant n_0(r)}|a_n|r^n<\exp(Kr^\mu)$$，并有

$$M(r)<r^N\sum_{n=0}^{N}|a_n|+[n_0(r)-N]\exp(Kr^\mu)<r^N\sum_{n=0}^{N}|a_n|$$
$$+(2^\mu e\mu Kr^\mu-N)\exp(Kr^\mu)$$
$$=\left[2^\mu e\mu Kr^\mu-N+r^N\exp(-Kr^\mu)\sum_{n=0}^{N}|a_n|\right]\exp(Kr^\mu)$$

对 $\varepsilon>0$，当 r 充分大时有

$$M(r)<\exp[(K+\varepsilon)r^\mu] \tag{1.30}$$

这表明从式(1.24)出发，推出了函数的最大模应满足的式(1.30)。

设式(1.11)的系数使式(1.27)的 α 成为有限值，于是对 $\mu>\alpha$，当 $n>n_0(\mu)$ 时

$$\frac{\log n}{\log\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}<\mu$$

或

$$|a_n|<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}$$

由式(1.30)推知，$f(z)$的最大模满足

$$M(r)<\exp\left[\left(\frac{1}{e\mu}+\varepsilon\right)r^\mu\right]$$

则 $f(z)$ 的级为 ρ 且不超过 μ。又因为 μ 表示大于 α 的数，所以

$$\rho\leqslant\alpha$$

结合式(1.26)，导出

$$\alpha=\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.31}$$

这样整函数的级可通过幂级数的系数表示。

现假定幂级数的系数不但使 α 为有限值而且使式(1.29)也是有限值，以 $(e\rho\sigma_0)^{\frac{1}{\rho}}$ 表示 β，取 $\sigma_0=\dfrac{\beta^\rho}{e\rho}$，则对 $K>\sigma_0$，当 $n>n_0(K)$ 时

$$n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}<(e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

或

$$|a_n|<\left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$$

并可推出和$M(r)$有关并类似于式(1.30)的不等式

$$M(r)<\exp[(K+\varepsilon)r^{\rho}]$$

注意到$f(z)$为ρ级,从此不等式知$f(z)$的型σ为有限值,且

$$\sigma\leqslant K$$

而K为大于σ_0的数,有

$$\sigma\leqslant\sigma_0=\frac{\beta^{\rho}}{e\rho}$$

结合式(1.28),导出

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{1.32}$$

这样整函数的型可通过幂级数的系数表示。

如果对整函数$f(z)$仅设定

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\mu}}\sqrt[n]{|a_n|}=\beta \tag{1.33}$$

为有限值,这时$\mu>0$;既未设它是整函数的级也未设$f(z)$为有限级整函数,那么据此得出:$f(z)$或是级为μ、型为$\frac{\beta^{\mu}}{e\mu}$的整函数,或是级为μ的整函数。

事实上,由所作假定知,对$\beta_0>\beta$,有不等式

$$n^{\frac{1}{\mu}}\sqrt[n]{|a_n|}<\beta_0$$

或

$$|a_n|<\left(\frac{\beta_0^{\mu}}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}$$

由此推出$M(r)$满足的不等式

$$M(r)<\exp\left[\left(\frac{\beta_0^{\mu}}{e\mu}+\varepsilon\right)r^{\mu}\right]$$

这样$f(z)$的级ρ不超过μ。若$\rho=\mu$,则从式(1.33)知,$f(z)$的型为$\frac{\beta^{\mu}}{e\mu}$。

对指数型超越整函数可用下式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sqrt[n]{|a_n|}=\beta<\infty$$

定义，就是说相应的函数为一级、型$\sigma=\dfrac{\beta}{e}$。命$a_n=\left(\dfrac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$，这样得到级为$\rho$、型为$\sigma$的整函数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}z^n$$

至于零级函数，如式(1.31)所示，其满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=0$$

因而当ε_n为任何趋近于零的正数序列时，只需

$$|a_n|=n^{-\frac{n}{\varepsilon_n}}$$

【例1.5】 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+\delta}}}(\delta>0)$为零级函数。

今在$|a_n|$上增加条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\infty$$

即取

$$|a_n|=\frac{1}{n^{\alpha_n n}}$$

式中α_n为趋近于零的正数序列，并满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha_n}}=0$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\log n=0$$

【例1.6】 令$\alpha_n=\dfrac{1}{(\log n)^{1-\delta}}(0<\delta<1)$，则无穷级函数为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\exp[n(\log n)^{\delta}]}$$

1.2.2 整函数的无穷乘积展开

一个超越整函数$f(z)$或无零点、或有若干个零点、或有无穷多个零点。对第一种情况，

$$f(z)=\exp[g(z)]$$

对第二种情况，

$$f(z)=(z-z_1)^{l_1}(z-z_2)^{l_2}\cdots(z-z_m)^{l_m}\exp[g(z)]$$

其中$g(z)$为整函数，z_1、z_2、$\cdots$、z_m为$f(z)$的互不相同的零点，l_1、l_2、$\cdots$、l_m为零点的重复数。

对第三种情况，命$z=0$为$f(z)$的λ重零点；在$f(0)\neq 0$处$\lambda=0$。因为$f(z)$在$|z|<R<\infty$内只有有限个零点，所以其可依模数不减的顺序编号，当编号时使重根复写的次数及此根的重复数相等，于是得到序列

$$0、0、\cdots、0、\alpha_1、\alpha_2、\cdots、\alpha_n、\cdots \tag{1.34}$$

这时$|\alpha_n|\leqslant|\alpha_{n+1}|$且$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=\infty$。

维尔斯特拉斯定理 对于式(1.34)，若它是按照模数不减的顺序排列且趋近于∞，则恒存在整函数$f(z)$，其零点和该序列中的数相同。

证明：构造一个整函数的序列

$$g_n(z)=z^{\lambda}\prod_{l=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp[P_l(z)] \tag{1.35}$$

式中$P_l(z)$为多项式。兹证明：经过适当选择$P_l(z)$，该序列在每一个有限半径的圆$|z|<R$内一致收敛的函数$f(z)$满足定理中的一切条件。显然$g_n(z)$以

$$0、0、\cdots、0、\alpha_1、\alpha_2、\cdots、\alpha_n、\cdots$$

为零点，这些点就是式(1.34)内前若干项，此处所指的每一个数出现的次数同它在式(1.34)内出现的次数相同。一般而言，$g_n(z)$具有指定重复数的重根。$\exp[P_l(z)]$类型的因子不增加新的零点，仅确保式(1.35)一致收敛。

现构造$P_l(z)$。任意固定一个圆$|z|<R$，并设$N_0=N(R)+1$

表示这样一个数，当 $n \geqslant N(R)+1$ 时所有点 α_n 均在半径为此圆两倍的同心圆外，

$$|\alpha_n|>2R \qquad (n>N(R)) \tag{1.36}$$

$$g_n(z)=g_{N(R)}(z)\prod_{l=N_0}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp[P_l(z)]$$

$$=g_{N(R)}(z)\exp\left\{\sum_{l=N_0}^{n}\left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+P_l(z)\right]\right\}$$

若 $|z|<R$，则由式(1.36)知当 $l>N(R)$ 时 $\left|\frac{z}{\alpha_l}\right|<\frac{1}{2}$。而

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)=\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+2\pi mi=2\pi mi-\left(\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\,\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\,\alpha_l^l}+\cdots\right)$$

取 $m=0$，就得到自然对数的主值，这对结果没有影响。这样的 $P_l(z)$ 和 $\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)$ 的幂级数的前 l 项只差一个符号，

令

$$P_l(z)=\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\,\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\,\alpha_l^l} \qquad (l=1、2、\cdots)$$

推出

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+P_l(z)=-\frac{z^{l+1}}{(l+1)\alpha_l^{l+1}}-\cdots$$

据此

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+P_l(z)\right|\leqslant\frac{1}{l+1}\left|\frac{z}{\alpha_l}\right|^{l+1}+\frac{1}{l+2}\left|\frac{z}{\alpha_l}\right|^{l+2}+\cdots$$

$$<\frac{1}{2^{l+1}}+\frac{1}{2^{l+2}}+\cdots=\frac{1}{2^l}$$

故对于这样的 $P_l(z)$，级数

$$\sum_{l=N_0}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+P_l(z)\right]$$

在 $|z|\leqslant R$ 内一致收敛，结果在圆内表示一个解析函数 $\varphi_R(z)$。序列

$$g_n(z)=g_{N(R)}(z)\exp\left\{\sum_{l=N_0}^{n}\left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)+P_l(z)\right]\right\}$$

也在 $|z|<R$ 内一致收敛；它在圆内表示解析函数 $f(z)$，

$$f(z)=g_{N(R)}(z)\exp[\varphi_R(z)]$$

注意上述的圆半径R是任意的。若依所述方法选择多项式序列$\{P_l(z)\}$，则$\{P_l(z)\}$在任何以原点为中心的圆内一致收敛，因而$f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(z)$在整个平面上解析，即为一个整函数。在$|z|<R$内$f(z)=g_{N(R)}(z)\exp[\varphi_R(z)]$且$\exp[\varphi_R(z)]\neq 0$，表明$f(z)$、$g_{N(R)}(z)$在圆内的零点相同。

因为多项式$g_{N(R)}(z)$的零点为式(1.34)中落在$|z|\leqslant 2R$内的那些零点，所以式(1.34)中落在$|z|<R$内的一切点且仅有这些点为$f(z)$在此圆内的零点。至此，$f(z)$满足定理的一切条件。

利用维尔斯特拉斯定理知

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}z^{\lambda}\prod_{l=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\alpha_l^l}\right)$$

或

$$f(z)=z^{\lambda}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\alpha_l^l}\right)$$

定理1.6 每一个以

$$0、0、\cdots、0、\alpha_1、\alpha_2、\cdots、\alpha_n、\cdots$$

为零点的整函数$f(z)$可以表示成

$$f(z)=z^{\lambda}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\alpha_l^l}\right)\exp[g(z)] \tag{1.37}$$

式中$g(z)$是整函数。

证明：由维尔斯特拉斯定理知，整函数

$$\varphi(z)=z^{\lambda}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_l}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_l}+\frac{z^2}{2\alpha_l^2}+\cdots+\frac{z^l}{l\alpha_l^l}\right)$$

它以$f(z)$的一切零点且仅以这些零点为零点，于是$\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$可表示一个无零点的整函数，得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\exp[g(z)]$$

这里$g(z)$为整函数。

式(1.37)也可改成如下形式

$$f(z)=z^{\lambda}\exp[g(z)]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left[\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{l_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{l_n}\right] \tag{1.38}$$

其中 λ 为 $z=0$ 的重数,z_1、z_2、…、z_n 为 $f(z)$ 的零点,l_1、l_2、…、l_n 为正整数;式(1.38) 也可称作维尔斯特拉斯的整函数分解。

【例 1.7】 求一个整函数并且仅以 0、−1、−2、…、−n 为其一级零点。

解:利用式(1.38),因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,而 $\lambda=1$、$z_n=-n$、$l_1=l_2=\cdots=l_n=1$,所以

$$f(z)=z\exp[g(z)]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$$

取 $g(z)=\gamma z$,γ 为欧拉常数,即

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}f(z)&=z\exp(\gamma z)\prod_{n=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{z\exp\left[z\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)\right]\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right.\\&\qquad\left.\left[\exp\left(-z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[z\exp(-z\log n)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]\end{aligned}$$

定义

$$\Gamma(z)=\frac{1}{f(z)} \tag{1.39}$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

称之为 Γ 函数。但

$$\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\ n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

$$=z\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}=z\Gamma(z) \tag{1.40}$$

有

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

置 $\Gamma(1)=1$，如 n 为正整数，

$$\Gamma(n+1)=n!$$

【例 1.8】 将 $\sin z$ 展成无穷乘积。

解：显然 $\sin z$ 的零点为 $z=n\pi$（n 为整数），按照模大小排列，0、$z_1=\pi$、$z_2=-\pi$、$z_3=2\pi$、$z_4=-2\pi$、…、$z_{2n-1}=n\pi$、$z_{2n}=-n\pi$；因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n\pi}\right|^{l+1}$ 当 $l=1$ 时收敛，所以

$$\begin{aligned}\sin z &= z\exp[g(z)]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(-\frac{z}{z_n}\right)\\ &= z\exp[g(z)]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\end{aligned} \tag{1.41}$$

为了得到整函数 $g(z)$，取 z_0 作 $\sin z$ 的非零点，在 z_0 的半径充分小的邻域 $U(z_0)$ 内，$\log(\sin z)$ 的单值分支 $\log(\sin z)$ 解析；同理 $\log z$、$\log\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ 也解析，推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\log(\sin z)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}\\ &= \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}\end{aligned}$$

表明在邻域 $U(z_0)$ 内 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)=0$，即 $g(z)=C$（常数），有

$$\sin z = Cz\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

而

$$\frac{\sin z}{z}=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

当 $z\to 0$ 时 $C=1$，故

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{1.42}$$

1.3 亚纯函数

1.3.1 亚纯函数的分解定理

设有理函数$f(z)$的极点为z_1、z_2、…、z_q，而$z=\infty$也是可能的极点，则$f(z)$可表达成部分分式

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + P(z) \tag{1.43}$$

式中$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$、$P(z)$分别为$\frac{1}{z-z_n}$、$z$的多项式，它们为$f(z)$在$z=z_n$及$z=\infty$的邻域内罗朗展开式的奇异部分。

今考虑有无穷多个极点的亚纯函数$f(z)$，这时无穷远点为这些极点唯一的极限点。把这些极点按其模从小到大的顺序排列z_1、z_2、…、z_n，且$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$。设$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$为$f(z)$在$z=z_n$邻域内罗朗展开式的奇异部分，为使$f(z)$具有如下形式

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + G(z) \tag{1.44}$$

式中$G(z)$为整函数。接下来讨论亚纯函数的部分分式分解定理。

定理 1.7 设$f(z)$为亚纯函数，$z_n=0$，z_1、z_2、…为极点，若$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$为$f(z)$在$z=z_n(n=0,1,2,\cdots)$邻域内罗朗展开式的奇异部分，则

$$f(z) = G(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + P_n(z)\right] \tag{1.45}$$

这里$G(z)$为整函数，$\{P_n(z)\}$为多项式序列。

证明：情况①，如果$\sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$在以原点为圆心并以任何正数$R$为半径的圆$C$：$|z|<R$内除掉在闭圆$\overline{C}$内的$m$个极点相应的项

外，那么 $\sum_{n=m+1}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ 在C内一致收敛。此时 $\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ 表示在$|z|<R$内的亚纯函数，并以z_0、z_1、z_2、…、z_m为极点。由于R任意大，因而 $\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ 以z_0、z_1、z_2、…为极点且以$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$为奇异部分的亚纯函数。令

$$G(z)=f(z)-\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) \tag{1.46}$$

依假定$f(z)$和 $\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ 有相同的极点及相同的奇异部分，表明$G(z)$为整函数，得

$$f(z)=G(z)+\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$$

情况②，若 $\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ 在$|z|<R$内（除与极点相应的项外）不一致收敛，对每一个$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$在$z=0$的邻域内展成幂级数

$$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)=a_0^{(n)}+a_1^{(n)}z+a_2^{(n)}z^2+\cdots \tag{1.47}$$

则式(1.47)在$|z|<|z_n|$内收敛，从而在圆$|z|<\frac{|z_n|}{2}$内绝对并一致收敛于$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$。取正整数序列$\{\varepsilon_n\}$使 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛，故对每一个n存在一个l_n，当$|z|<\frac{|z_n|}{2}$时

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-\sum_{p=0}^{l_n} a_p^{(n)}z^p\right|<\varepsilon_n$$

命

$$P_n(z)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)}z^p$$

有

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right|<\varepsilon_n \tag{1.48}$$

设R为任意大的正数，当n充分大（$>m$）时$\frac{|z_n|}{2}<R$，且当$n>m$时式（1.48）在$|z|<R$内成立。因为$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$收敛，所以

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right] \tag{1.49}$$

在$|z|<R$内绝对又一致收敛于一个全纯函数$f_2(z)$。而

$$f_1(z)=G_0\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right]$$

为亚纯函数并以z_0、z_1、z_2、…、z_m为极点，且以$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$为各级点所属的奇异部分，这样

$$f_1(z)+f_2(z)=G_0\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right] \tag{1.50}$$

在$|z|<R$内为亚纯函数，与$f_1(z)$在$|z|<R$内有相同的极点及其所属的奇异部分。

由于R可以任意大，因而式（1.50）表示亚纯函数，它的极点为z_0、z_1、z_2、…，相应的奇异部分为$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$（$n=0,1,2,\cdots$）。再依假设，$f(z)$与$f_1(z)+f_2(z)$相差一个整函数$G(z)$，故有

$$f(z)=G(z)+G_0\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right]$$

在定理1.7中若$f(z)$的极点均为简单极点，且设极点的留数为a_0、a_1、a_2、…，$|a_n|\leqslant A$，这时$f(z)$关于极点z_n的奇异部分为

$$G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)=\frac{a_n}{z-z_n}=-a_n\left[\frac{1}{z_n}+\frac{z}{z_n^2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{z_n^n}-\frac{1}{z-z_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n\right]$$

置

$$P_n(z)=-a\left(\frac{1}{z_n}+\frac{z}{z_n^2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{z_n^n}\right)$$

导出

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right|=\frac{|a_n|}{|z-z_n|}\left|\frac{z}{z_n}\right|^n \tag{1.51}$$

当 n 适当大时 $|z_n|\geqslant 1$，当 $|z|<\frac{|z_n|}{2}$ 时有

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right|=\frac{2A}{|z_n|}\left(\frac{1}{2}\right)^n<C\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1.52}$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，得到

$$f(z)=G(z)+\frac{a_0}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z-z_n}+\frac{1}{z_n}+\frac{z}{z_n^2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{z_n^n}\right) \tag{1.53}$$

尤其是若有正整数 l 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^l}$ 收敛，则

$$f(z)=G(z)+\frac{a_0}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z-z_n}+\frac{1}{z_n}+\frac{z}{z_n^2}+\cdots+\frac{z^{l-1}}{z_n^l}\right) \tag{1.54}$$

因为分解的不唯一性，所以定理1.7 存在缺陷。亚纯函数一方面可以表示成部分分式，另一方面也可表示成两个整函数的商。

定理 1.8 $f(z)$为亚纯函数的充要条件是其可以表达成两个整函数的商。

证明：必要性，不考虑 $f(z)$的极点个数，均可构造一个整函数 $G(z)$使之零点及所属的级与 $f(z)$的极点及所属的级相同。命

$$F(z)=f(z)G(z)$$

则 $F(z)$为整函数，推出

$$f(z)=\frac{F(z)}{G(z)}$$

充分性，若$G(z)$、$F(z)$为整函数，且有

$$f(z)=\frac{F(z)}{G(z)}$$

则$f(z)$在开面上除$G(z)$的零点之外为解析，而且只在$G(z)$零点处 $f(z)$才可能有极点，于是 $f(z)$为亚纯函数。

1.3.2 特征函数

今以

$$n(r,a)=n(r,f=a)=\begin{cases}n(r,f) & \text{当}\ a=\infty\text{时}\\ n\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right) & \text{当}\ a\neq\infty\text{时}\end{cases}$$

表示方程 $f(z)=a$ 在圆 $|z|<r(0<r\leqslant\rho)$ 内根的个数；以 $n(0,a)=$

$$n(0,f=a)=\begin{cases}n(0,f) & \text{当}\ a=\infty\text{时}\\ n\left(0,\dfrac{1}{f-a}\right) & \text{当}\ a\neq\infty\text{时}\end{cases}$$

表示方程 $f(z)=a$ 在原点 $z=0$ 处的根的个数，并置

$$\begin{aligned}N(r,a) &= N(r,f=a)\\ &=\begin{cases}N(r,f)=\displaystyle\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\mathrm{d}t+ \\ \qquad\qquad n(0,a)\log r & \text{当}\ a=\infty\ \text{时}\\ N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=\displaystyle\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\mathrm{d}t+ \\ \qquad\qquad n(0,a)\log r & \text{当}\ a\neq\infty\ \text{时}\end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\log\frac{\rho}{|a_j|} &= \int_0^\rho\left(\log\frac{\rho}{t}\right)\mathrm{d}n(t,0)=n(t,0)\log\frac{\rho}{t}\Big|_0^\rho+\int_0^\rho\frac{n(t,0)}{t}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^\rho\frac{n(t,0)}{t}\mathrm{d}t=N(\rho,0) \qquad (1.55)\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\log\frac{\rho}{|b_j|}=\int_0^\rho\frac{n(t,\infty)}{t}\mathrm{d}t=N(\rho,\infty) \qquad (1.56)$$

定义

$$\log^+x=\begin{cases}\log x & (x\geqslant 1)\\ 0 & (0\leqslant x<1)\end{cases}$$

当 $x\geqslant 0$ 时 $\log x=\log^+x-\log^+\dfrac{1}{x}$。令

$$\begin{aligned}m(r,a) &= m(r,f=a)\\ &=\begin{cases}m(r,f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta & (a=\infty)\\ m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\mathrm{d}\theta & (a\neq\infty)\end{cases}\end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}\mathrm{d}\varphi$$
$$=m(\rho,\infty)-m(\rho,0) \tag{1.57}$$

从式(1.55)、式(1.56)、式(1.57)及式(1.10)给出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)}{t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,0)}{t}\mathrm{d}t+\log|f(0)| \tag{1.58}$$
$$m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=m(\rho,0)+N(\rho,0)+\log|f(0)| \tag{1.59}$$

当 $f(0)=0$、∞ 时设 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的邻域内的罗朗展开式为

$$f(z)=c_s z^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots \qquad (c_s\neq 0)$$

取 $f_0(z)=z^{-s}f(z)$，所以 $f_0(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 上亚纯，且 $f_0(0)=c_s$，并有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_0(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi-s\log\rho$$
$$s=n(0,0)-n(0,\infty)$$

对 $f_0(z)$ 利用式(1.58)，推出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\mathrm{d}t+n(0,\infty)\log\rho$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}\mathrm{d}t+n(0,0)\log\rho$$
$$+\log|c_s|$$
$$m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=m(\rho,0)+N(\rho,0)+\log|c_s| \tag{1.60}$$

式(1.60)称为 Jensen-Nevanlinna 公式。下面讨论特征函数。

设 $f(z)$ 是在圆 $|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 内一个不恒为零的亚纯函数，在式(1.59)中变 ρ 为 $r(0<r<R)$，

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f) \tag{1.61}$$

结果式(1.59)、式(1.60)可改为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)| \tag{1.62}$$

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s| \tag{1.63}$$

称$T(r,f)$为$f(z)$的特征函数。

特征函数$T(r,f)$有两个重要性质。根据式(1.10)，对任意一个复数a有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\log|a| & \text{当 } |a|\geqslant 1 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |a|<1 \text{ 时}\end{cases}$$

即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=\log^+|a| \tag{1.64}$$

先命$f(\sigma)\neq\infty$，当$f(0)\neq e^{i\theta}$时$f(z)-e^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$，应用式(1.57)、式(1.58)，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|\mathrm{d}\varphi\\ &=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|f(0)-e^{i\theta}|\end{aligned}$$

而$r\in(0,R)$，对固定的r，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)\mathrm{d}\theta-N(r,f)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

使用式(1.62)、式(1.64)，有

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)\mathrm{d}\theta+\log^+|f(0)| \tag{1.65}$$

称式(1.65)为Cartan 恒等式。

再设$f(0)=\infty$，且设c_s为$f(z)$在$z=0$点邻域内展开式中的首项非零系数，将式(1.57)、式(1.60)应用于$f(z)-e^{i\theta}$，导出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|\mathrm{d}\varphi=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|c_s|$$

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)\mathrm{d}\theta+\log|c_s| \tag{1.66}$$

当θ固定时$N(r,e^{i\theta})$为r的非减函数；根据式(1.65)、式(1.66)，判定$T(r,f)$为r的非减函数，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\log r}T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(r,e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

进一步判定可知$T(r,f)$为$\log r$的凸函数。

另设a_1、a_2、…、a_p为p个复数，则

$$\log^+\left|\prod_{l=1}^{p}a_l\right|\leqslant\sum_{l=1}^{p}\log^+|a_l| \tag{1.67}$$

$$\log^+\left|\sum_{l=1}^{p}a_l\right|\leqslant\sum_{l=1}^{p}\log^+|a_l|+\log p \tag{1.68}$$

对$|z|<R$内的p个亚纯函数$f_1(z)$、$f_2(z)$、…、$f_p(z)$，有

$$m\left(r,\sum_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}m(r,f_l)+\log p$$

$$m\left(r,\prod_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}m(r,f_l)$$

式中$r\in(0,R)$。另外，当$f_l(0)=\infty(l=1,2,\cdots,p)$时

$$N\left(r,\sum_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}N(r,f_l)$$

$$N\left(r,\prod_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}N(r,f_l)$$

故从式(1.61)知

$$T\left(r,\sum_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}T(r,f_l)+\log p \tag{1.69}$$

$$T\left(r,\prod_{l=1}^{p}f_l\right)\leqslant\sum_{l=1}^{p}T(r,f_l) \tag{1.70}$$

当$R>1$时如果只考虑$1\leqslant r<R$，那么可去掉条件$f_l(0)=\infty$。取$f(z)$为$|z|<R$内的全纯函数，置

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

得到不等式

$$T(r,f)\leqslant\log^+M(r,f)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}T(\rho,f) \tag{1.71}$$

其中$0<r<\rho<R$。事实上，由$f(z)$的全纯性知，

$$T(r,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\leqslant\log^+M(r,f)$$

这就证明了式(1.71)左边的不等式。关于其右边的不等式，首先注意到当$M(r,f)\leqslant 1$时式(1.71)右边的不等式成立，因此可以设$M(r,f)>1$，选$z_0=re^{i\theta}$，使$|f(z_0)|=M(r,f)$；其次依Poisson-Jensen公式，导出

$$\begin{aligned}&\log^+M(r,f)=\log^+|f(z_0)|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi\\ &\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{\rho+r}{\rho-r}m(\rho,f)=\frac{\rho+r}{\rho-r}T(\rho,f)\end{aligned}$$

表明式(1.71)右边不等式正确。

设$f(z)$为圆$|z|<R$内的非常数亚纯函数，a为有穷复数，$f(z)-a$在$z=0$点邻域内的展开式为

$$f(z)-a=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots\qquad(c_s\neq 0)$$

依式(1.66)，对$r\in(0,R)$，有

$$T(r,f-a)=T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\log|c_s|$$

另一方面，由于

$$m(r,f-a)\leqslant m(r,f)+\log^+|a|+\log 2$$

$$m(r,f)\leqslant m(r,f-a)+\log^+|a|+\log 2$$

及

$$N(r,f-a)=N(r,f)$$

又有

$$|T(r,f-a)-T(r,f)|\leqslant\log^+|a|+\log 2\qquad(1.72)$$

因此

$$\left|T(r,f)-T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\log|c_s|\right|\leqslant\log^+|a|+\log 2\qquad(1.73)$$

定理1.9 若a为有穷复数，则

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|c_s|+\varepsilon(r,a)$$

而

$$|\varepsilon(r,a)|\leqslant\log^+|c_s|+\log2$$

假定$a(\neq0)$、b为两个常数，记

$$f_1(z)=f(z-a)\qquad f_2(z)=af(z)\qquad f_3(z)=\frac{1}{f(z)}$$

依式(1.66)、式(1.69)、式(1.70)，特征函数$T(r,f_1)$、$T(r,f_2)$和$T(r,f_3)$、$T(r,f)$相差均为一个有界函数。更一般的，考虑函数

$$F(z)=\frac{af(z)+b}{cf(z)+d}$$

式中a、b、c、d为常数，且$ad-bc\neq0$。因为F可以分解成上述三种变换形式的复合，所以$F(z)$的特征函数$T(r,F)$与$T(r,f)$的差同样也是一个有界函数。

定理 1.10 设$f(z)$为圆$|z|<R$内的非常数亚纯函数，$f(0)\neq0$、∞，$f'(0)\neq0$，以及a_1、a_2、…、$a_q(q\geqslant2)$是q个判别有穷复数，且$|a_l-a_j|\geqslant\delta(\delta>0,1\leqslant l\neq j\leqslant q)$，则对$r\in(0,R)$，有

$$m(r,\infty)+\sum_{l=1}^{q}m(r,a_l)\leqslant 2T(r,f)-N_0(r)+S(r,t)\tag{1.74}$$

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{l=1}^{q}\frac{f'}{f-a_l}\right)+q\log^+\left(\frac{3q}{\delta}\right)$$

$$+2\log2+\log\frac{1}{|f'(0)|}\tag{1.75}$$

并且$S(r,f)$满足

(1) 当$R=+\infty$时，如果$f(z)$为有穷级，那么

$$S(r,f)=O(\log r)\tag{1.76}$$

如果$f(z)$为有穷级，那么

$$S(r,f)=O\{\log[rT(r,f)]\}\tag{1.77}$$

但可能除去一个关于r的例外集合E_0，其线性测度$m(E_0)\leqslant2$，而E_0仅仅有赖于$T(r,f)$，与a_l、q无关。

（2）当$R\in(0,+\infty)$时，有

$$S(r,f)=O\left[\log^{+}T(r,f)+\log\frac{1}{R-r}\right] \tag{1.78}$$

但可能除去一个关于r的例外集合E_0，而

$$\int_{E_0}\frac{\mathrm{d}r}{R-r}<+\infty$$

2 三角级数

2.1 基本性质

本章讨论广义三角级数(一般三角级数)的概念。设

$$\lim_{h\to 0}\sum_n u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k = S \tag{2.1}$$

称级数 $\sum_n u_n$ 可用平均求和法(R,k) 计和。可以证明:当 $k>1$ 时 (R,k) 具有正则性。黎曼原来的求和结果为(R,z),黎曼在此基础上建立了三角级数理论。

取 $\alpha_n = o(1)$、$\beta_n = o(1)$,$A_n = A_n(x) = \alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx$;从 $F(x) = C + C'x + \frac{1}{2}A_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2}$ 得到

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2} = \sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

当$h\to 0$ 时左端的上限、下限分别记作$\mathscr{D}^2_+F(x)$、$\mathscr{D}^2_-F(x)$。如果极限存在,那么

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2} = \mathscr{D}^2F(x) \tag{2.2}$$

称式(2.2)为 $F(x)$在 x 的广义二次导数。因此 $\sum_n A_n(x) = S(x)(R,z)$ 与$\mathscr{D}^2F(x)=S(x)$等价。

定理2.1 具有周期2π 的函数$f(x)$可用系数为$o(1)$的三角级数表达的充要条件是有函数 $F(x)$适合 $\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$,且对区间(b,c)上的函数$\psi(x)$,并当

$$\psi(b) = \psi(c) = \psi'(b) = \psi'(c) = 0$$

$$\psi(x) = \int_b^x\psi'(t)\mathrm{d}t \qquad x\in[b,c]$$

时有

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^2\int_b^c F(x)\psi(x)\cos[\mu(x-a)]\mathrm{d}x=0 \qquad (2.3)$$

证明：必要性，设 $\sum_n A_n(x)=f(x)(R,z)$、$A_n(x)=o(1)$，则对 $\varepsilon>0$，$|A_n(x)|<\varepsilon_0(n\geqslant n_0)$。由 $\sum_n A_n(x)$ 作 $F(x)$，当 $h\to 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{n_0}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=o\left(\frac{1}{h}\right)$$

若 $mh<\pi\leqslant(m+1)\pi$，则

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{m}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|<\frac{2\pi}{h}$$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|<\frac{\varepsilon}{mh^2}$$

推出

$$\left|\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{2h}\right|<\varepsilon\left(\frac{2}{mh}+2\pi\right)+o(1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{2h}=0$$

另设 $C=C'=A_0=0$，有

$$F(x)=-\sum_n\frac{A_n(x)}{n^2}$$

命 $\rho_n^2=\alpha_n^2+\beta_n^2(\rho_n\geqslant 0)$，这样存在 $\{\gamma_n\}$ 满足

$$-F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n}{n^2}\cos(nx-\gamma_n)$$

也就是有 $\{\gamma'_n\}$、$\{\gamma''_n\}$ 符合

$$I_\mu(\psi,a)=\int_b^c F(x)\psi(x)\cos[\mu(x-a)]\mathrm{d}x=\sigma_1+\sigma_2$$

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n}{n^2}\int_b^c\psi(x)\cos[(\mu+n)x-\gamma'_n]\mathrm{d}x$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n}{n^2}\int_b^c\psi(x)\cos[(\mu+n)x-\gamma''_n]\mathrm{d}x$$

利用 $\psi(b)=\psi'(b)=0$，得

$$\int_b^c \psi(x)\cos(kx-\gamma)\mathrm{d}x = -\frac{1}{k^2}\int_b^c \psi''(x)\cos(kx-\gamma)\mathrm{d}x$$

$$|I_\mu(x,a)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{2n^2}\frac{\eta(n+\mu)}{(n+\mu)^2} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\rho_l}{2l^2}\frac{\eta(|l-\mu|)}{(l-\mu)^2} \qquad (l \neq [\mu])$$

其中$\{\eta(n)\}$为$o(1)$，对于γ均匀的$\eta(n)=o(1)$并满足

$$\left|\int_b^c \psi''(x)\cos(nx-\gamma)\mathrm{d}x\right| < \eta(n) \qquad (\eta(n)\downarrow 0)$$

并且

$$\sum_n \frac{\rho_n}{2n^2}\frac{\eta(n+\mu)}{(n+\mu)^2} \leqslant \eta(\mu)\sum_n \frac{\rho_n}{n^2\mu^2}$$

$$\sum_{n=1}^{[\mu/2]} \frac{\rho_n}{n^2}\frac{\eta(\mu-n)}{(n-\mu)^2} \leqslant \eta\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2}\sum_n \frac{\rho_n}{n^2} = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\sum_{n=1+[\mu/2]}^{[\mu]-1} \frac{\rho_n}{n^2}\frac{\eta(|\mu-n|)}{(n-\mu)^2} \leqslant \eta(1)O\left(\frac{\rho_n}{\mu^2}\right)\sum_l \frac{1}{l^2} = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\sum_{n=1+[\mu]}^{\infty} \frac{\rho_n}{n^2}\frac{\eta(n-\mu)}{(n-\mu)^2} = O\left(\frac{\rho_\mu}{\mu^2}\sum_l \frac{1}{l^2}\right) = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

综上述知$I_\mu(\psi,a)=O\left(\dfrac{1}{\mu^2}\right)$

充分性，先证明 Schwarz 引理：若$h(x)$在$[a,b]$上满足$\mathscr{D}^2h(x)=0$，则$h(x)(a\leqslant x\leqslant b)$为一次函数。事实上，当$\varepsilon>0$时函数

$$g(x)=\left\{h(x)-h(a)-\frac{x-a}{b-a}[h(b)-h(a)]\right\}+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

适合$\mathscr{D}^2g(x)=2\varepsilon>0$。如果存在$x$使$g(x)>0$，那么有$x_0\in(a,b)$，使$h$充分小时

$$g(x_0+h)-g(x_0)\leqslant 0 \qquad g(x_0-h)-g(x_0)\leqslant 0$$

这与$\mathscr{D}^2g(x_0)>0$不相容。结果$g(x)\leqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，可是$\varepsilon(x-a)(x-b)$在$(a,b)$上取负值，$\varepsilon$可以很小，故对$x\in[a,b]$

$$h(x)-h(a)-\frac{x-a}{b-a}[h(b)-h(a)]=0$$

成立。

结合$\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$和引理，从$\mathscr{D}^2[F(x+2\pi)-F(x)]=0$导出

$$F(x+2\pi)-F(x)=\alpha x+\beta$$

置$\alpha=2\pi A_0$、$C'=\frac{\beta}{2\pi}-\frac{\alpha}{2}$，有

$$F(x+2\pi)-C'(x+2\pi)-\frac{1}{2}A_0(x+2\pi)^2=F(x)-C'x-\frac{1}{2}A_0x^2$$

表明$G(x)=F(x)-C'x-\frac{1}{2}A_0x^2$为周期函数，

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^2\int_b^c G(x)\psi(x)\cos[\mu(x-a)]\mathrm{d}x=0$$

式中b、c、$\psi(x)$为$b<-\pi$、$c>\pi$、$\psi(x)=1$，$x\in[-\pi,\pi]$，对$\mu\to\infty$，

$$\mu^2\int_b^{-\pi}+\int_\pi^c G(x)\psi(x)\cos[\mu(x-a)]\mathrm{d}x=o(1)$$

$\mu=n^2$，有

$$n^2\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\cos[n(x-a)]\mathrm{d}x=o(1)$$

令$C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\mathrm{d}x$，推出

$$G(a)=C-\frac{A_1(a)}{1^2}-\frac{A_2(a)}{2^2}-\cdots$$

从而$F(x)=C+C'x+\frac{1}{2}A_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2}$，$\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$，$f(x)$为$\sum_n A_n(x)$的$(R,z)$平均值。

定理2.2 系数α_n、β_n为$o(1)$的三角级数$\sum_n A_n(x)$在x_0具有收敛性的充要条件为只关于黎曼函数

$$F(x)=C+C'x+\frac{1}{2}A_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2}$$

在x_0附近的性质，其中$A_n(x)=\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx(n>0)$。

$\sum_n A_n(x_0)$收敛的充要条件为极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}F(t+x_0)\rho(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

存在。其中 $0<2\varepsilon<\pi$，$\rho(t)$ 为任意的，其在 $(-2\varepsilon,2\varepsilon)$ 上具有 $\rho'''(t)$，且对于 $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$，

$$\rho(-2\varepsilon)=\rho(2\varepsilon)=0\qquad \rho(t)=1$$

证明：取 $\rho(t+2\pi)=\rho(t)$ 并设当 $t\notin(-2\varepsilon,2\varepsilon)$ 时对 $|t|<\pi$，$\rho(t)=0$，推出 $\rho(\pm 2\varepsilon)=\rho'(\pm 2\varepsilon)=\rho''(\pm 2\varepsilon)=0$，$\rho(\pm\varepsilon)=1$、$\rho'(\pm\varepsilon)=\rho''(\pm\varepsilon)$。函数

$$\Phi(t)=F(t)-C't-\frac{1}{2}A_0t^2$$

在 $\mu=n+\frac{1}{2}$ 处，满足

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}A_l(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x+t)\sum_{l=1}^{n}(-l\cos lt)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x+t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\sin\mu t}{\sin\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\Phi(x+t)\rho(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\sin\mu t}{\sin\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

利用 $\rho(0)=1$、$\rho'(0)=\rho''(0)=\rho'''(0)=0$，有

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\left(\frac{\sin\mu t}{\sin\frac{t}{2}}\right)A_0\rho(t)\mathrm{d}t+o(1)=2\pi A_0$$

导得

$$A_0+\sum_{l=1}^{n}A_l(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}F(x+t)\rho(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\sin\mu t}{\sin\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t+o(1)$$

设 $a_n=o(1)$、$b_n=o(1)$。

$F(x)=\sum\limits_{n}\dfrac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}$ 在 $(\alpha,\beta)\subset(-\pi,\pi)$ 上成立，$F'(x)$ $(\alpha<x<\beta)$ 几乎处处存在且于区间 (α,β) 内勒贝格可积，则 young

三角级数 $\sum_n A_n(A_n = a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 在(α,β)中任意一定点的收敛性只与$F(x)$在此点附近的性质有关。事实上，取$0<\varepsilon<\pi$，须证对定点$x\in(\alpha,\beta)$，当ε充分小时

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varepsilon}[F(x+t)+F(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t + o(1)$$

$$S_n = A_1(n) + A_2(n) + \cdots$$

令$X(t)=X(-t)(0\leqslant t\leqslant\pi)$，$X(t)$具有连续性、周期性，对$t\in(\varepsilon,\pi)$，$X(t)=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$且$X'(t)$、$X''(t)$存在并有界，此时$X(t)$的傅里叶级数$\sum_n c_n\sin nt$绝对收敛。

由$X(t)$的性质，$\mathscr{S}[X]$、$\mathscr{S}[X']$都是匀敛的级数，其中$\mathscr{S}[X]$表示形如

$$X(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + \sin nx) \tag{2.5}$$

的三角级数。因此$J_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varepsilon}^{\pi}[F(x+t)+F(x-t)]X(t)\sin nt\mathrm{d}t$中的$X(t)=\sum_l c_l\sin lt$，其积分、导数、求和的顺序可作如下变化

$$J_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varepsilon}^{\pi}[F(x+t)+F(x-t)]\sin lt\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}c_l(k_{l-n} - k_{l+n})$$

这里

$$\begin{aligned} k_n - k_{-n} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varepsilon}^{\pi}[F(x+t)+F(x-t)]\cos nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\pi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varepsilon} \\ &= \pi A_n(x) - \int_0^{\varepsilon}[f(x+t)+f(x-t)]\cos nt\mathrm{d}t \\ &= o(1) \end{aligned}$$

对于$\eta>0$，存在m，当$n\geqslant m$时$|k_n|<\eta$且置$C=\sum_l|c_l|$有

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} c_l k_{l+n}\right| < \eta C$$

如果$K=\max\limits_{p<m}\{|k_l|\}$,那么当$n\to\infty$时

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} c_l k_{l-n}\right| \leqslant \left|\sum_{l=1}^{n-m} c_l k_{l-n}\right| + \left|\sum_{l=n-m+1}^{n+m-1} c_l k_{l-n}\right| + \left|\sum_{l=n+m}^{\infty} c_l k_{l-n}\right|$$

$$\leqslant \eta C + K(|c_{n-m+1}| + \cdots + |c_{n-m-1}|) + \eta C$$

的极限为零,也就是$J_n=o(1)$。

2.2 三角级数的M集和U集

设$E\subset[-\pi,\pi]$,若存在系数为不全为零的三角级数,即$a_0^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\neq 0$,其在余集$CE=[-\pi,\pi]\backslash E$上收敛于零,则称$E$为一个$M$集;若当三角级数在$CE$上收敛于零时其系数必须全是零,则称$E$为一个$\cup$集。不成$M$集的点集是$\cup$集。可以证明:当$E$不含有完全点集时$E$是$\cup$集。

概敛于零的三角级数S可能具有点集$E\subset[-\pi,\pi]$,在E上$S\neq 0$,称E为S的核;E中可能存在子集N,在N上S的部分和的上限为E无穷大,称N为S的核心。可以证明:当概敛于零的三角级数的核E不包括完全点集时E为空集且无核。取S的核为$E(S)$、核心为$N(S)$,它们落在区间δ中的部分记作$\delta E(S)$、$\delta N(S)$,而$\delta\subseteq[-\pi,\pi]$。

定理2.3 设S为概敛于零的三角级数,其核、核心为$E(S)$、$N(S)$。若$\delta E(S)\neq 0$,则$\delta N(S)$不是空集,且有三角级数以$\delta E(S)$、$\delta N(S)$作它的核、核心($\delta\subseteq(-\pi,\pi)$)。

证明:依所列条件,取$C'''(-\pi,\pi)$中的周期函数$\lambda(x)=\lambda(x+2\pi)$。$\lambda(x)$在$\delta$上取正值,在$(-\pi,\pi)\backslash\delta$上$\lambda(x)=0$。因为$\lambda'''(x)\in C$,所以$\lambda(x)$的傅里叶系数是$o\left(\frac{1}{n^3}\right)$。命$\lambda(x)=\sum\limits_n \gamma_n e^{inx}$,$S$为$\sum\limits_n c_n e^{inx}$;对

$$K_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \gamma_{n-l} \qquad (\gamma_{-n} = -\gamma_n \qquad c_{-n} = c_n)$$

当 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}|\gamma_l| < \infty$ 时称 $\sum_l \gamma_l$ 为速敛级数。今 $\sum_n \gamma_n e^{inx}$ 在 $(-\pi,\pi)\backslash\delta$ 上匀速敛于零。记 S 与 $\lambda(x)$ 的“乘积级数” $\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx}$ 为 $\sigma(\lambda)$。现证明 $\sigma(\lambda)$ 在 $(-\pi,\pi)\backslash\delta$ 上匀敛于零。

置 $R_l(x) = \sum_{n=l}^{\infty}\gamma_n e^{inx}$，级数 $\sum_l |R_l(x)|$ 在 $(-\pi,\pi)\backslash\delta$ 上匀敛。当 $x \in (-\pi,\pi)\backslash\delta$ 时

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= \sum_{n=-m}^{m} K_n e^{inx} = \sum_{n=-m}^{m} e^{inx}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l\gamma_{n-l} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l e^{ilx}\sum_{n=-m}^{m}\gamma_{n-l}e^{i(n-l)x} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l e^{ilx}R_{-m-l}(x) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l e^{ilx}R_{m-l+1}(x) \end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{m\to\infty}Q_m(x)=0$，据此知 $\sigma(\lambda)=0$。级数 $\sigma(\lambda)$ 在 δ 中不属于 $E(S)$ 的点也收敛于零并概敛于零。可是在 $\delta E(S)$ 上 $\sigma(\lambda)$ 并非收敛于零，$\delta E(S)$ 为 $\sigma(\lambda)$ 的核。

由于 $\lambda(x)$ 有界，因此对 $\gamma_n^* = \gamma_n\ (n\neq 0)$、$\gamma_0^* = \gamma_0 - \lambda(x)$，$\sum_n c_n e^{inx}$、$\gamma^* + \sum_n \gamma_n^* e^{inx}$ 的乘积级数可用上述方式讨论，这里

$$K_n^* = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l\gamma_{n-l}^* = K_n - \lambda(x)c_n$$

表明 $\sum_n K_n^* e^{inx}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上均匀地收敛于零，结果对于 $x\in[-\pi,\pi]$，$\sum_n K_n e^{inx} - \lambda(x)\sum_n c_n e^{inx}$ 收敛于零。故 S 落在区间 δ 中的部分核心，即 $\sigma(\lambda)$ 落在 δ 中的部分核心。

注意若核心为空集，则核也是空集。

定理2.4 若 E_1、E_2、…为闭的 U 集，则并集 $E_1\cup E_2\cup\cdots$ 也是 U 集。

证明:首先注意到,概敛于零的三角级数S具有非空的核,必有完全点集P包括E使任意$\delta(P)$含有非空的$\delta(E)$。事实上,核心$N(S)$不包括孤立点,$N(S)$的极限点集$N'(S)=P$为完全点集。设δ为P的余空间,$\delta E(S)\neq 0$,依定理2.3知$\delta N(S)$也不是空的,这是不可能的。

如果存在不全为零而在$CE=[-\pi,\pi]\setminus(E_1\cup E_2\cup\cdots)$上概敛于零的三角级数$S$,那么核$E(S)$、核心$N(S)$都不是空的;并且有完全点集$P\supset E$如上所述。可以证明:至少存在一个$E_n$在某$\delta P$中是稠密的。若所有$E_n$在$P$中都不稠密,那么它的并集在$P$上也成集,核心$N$也如此。但是$N$为$G_\sigma$类型,它在$P$上处处稠密。实际上,$\mathscr{S}[S]$的部分和$S_n(x)\leqslant m$,且构成闭集$F_m$,并集$F_1\cup F_2\cup\cdots$为$F_\sigma$类型,$N(S)=C(F_1\cup F_2\cup\cdots)$为$G_\sigma$类型,这样$P$有一部分$\delta P$完全处于某个$F_m$之中,使该$\delta P$成为$\cup$集。另一方面,$\delta P\supset\delta E$,由定理2.3知$\delta E$为$M$集,这是矛盾的,表明上述的$S$不存在,即$E_1\cap E_2\cap\cdots$为$U$集。

假定α_n为实数、$\beta\in(-1,1)$;对$x\in(-\pi,\pi)$,有满足$\cos(nx+\alpha_n)\geqslant\beta$的所有点构成的点集$E_n$,当$n_1<n_2<\cdots$时称$E_{n_1}\cup E_{n_2}\cup\cdots$为$H$点集。

定理2.5 $(-\pi,\pi)$中的H点集为U集。

证明:以$\{X\}$表示X的小数部分。取$0<d<1$、$n_1<n_2<\cdots$,于是点集$E_l=\left\{x\left|\left(\dfrac{n_l x}{2\pi}-d_l\right)\leqslant d\right.\right\}$所构成的交集$E=E_1\cap E_2\cap\cdots(0<x<2\pi)$为$H$点集。显然任意$H$点集均可表达成此种形式。

将E_l记在单位圆周上,E_l为由n_l个等距的圆弧组成,每个弧长为$\dfrac{2\pi d}{n_l}$。E_l的余集CE_l是依n_l个"区间"$I_{n_1}^{(l)}$、$I_{n_2}^{(l)}\cdots$构成,$|I_p^{(l)}|=\dfrac{2\pi(1-d)}{n_l}$。设复系数三角级数$\sum\limits_n c_n e^{inx}$在$E$的外部$CE$上为零。

对$\sum\limits_n c_n e^{inx}$逐项积分两次所得级数之和$F(x)$利用Schwarz定理,$F(x)$在$CE$中任意区间$I$上为一次函数。当$x$、$x\pm h\in I$时

$\Phi_h(x)=\dfrac{\Delta^2 F(x,2h)}{4h^2}=0$ 取 x_0 为 I_1 的中点，$h<\dfrac{2\pi(1-d)}{4}$，这样 $I_p^{(l)}$ 处于 E 的外部，$\Phi_{h/n_l}(x_0)=0$。命

$$S_{h/n_l}(x)=\frac{1}{n_l}\sum_{p=0}^{n_{l-1}}\Phi_{h/n_l}\left(x+\frac{2\pi p}{n_l}\right)$$

推出 $S_{h/n_l}(x_0)=0$。可是

$$S_{h/n_l}(x)=c_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{nn_l}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\exp(inn_lx)\quad(n\neq 0)$$

当 $l\to\infty$ 时级数和为 $O\left(\dfrac{1}{h^2}\max\limits_{l\leqslant n_l}|c_l|\right)=o(1)$，从而关于 x 均匀地成立，

$$\lim_{l\to\infty}S_{h/n_l}(x)=c_0$$

因为 $S_{h/n_l}(x_0)=0$，所以 $c_0=0$。令 $m\neq0$，有 $\sum\limits_n c_n\exp[i(n-m)x]$ 仍在的外部收敛于零，且必须 $c_m=0$，即 E 为 U 集。

进一步推广 H 点集的概念。设 $E\subset[0,1]$，在 p 维欧几里德空间 R^p 中考虑一个处于单位正方形 $x_j\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right](j=1,2,\cdots,p)$ 内的长方体 Ω。若存在格子点列 $\{n_1^{(l)},n_2^{(l)},\cdots,n_p^{(l)}\}$（$n_q^{(l)}$ 为整数）使当 $p\in E$ 时，在 R^p 中所有点 $\{(n_1^{(l)}x),(n_2^{(l)}x),\cdots,(n_p^{(l)}x)\}$ 均不在 Ω 内，当 $(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ 为一个格子点（x_q 为整数）时

$$\lim_{l\to\infty}|n_1^{(l)}x_1+n_2^{(l)}x_2+\cdots+n_p^{(l)}x_p|=\infty$$

则称 E 为 $[0,1]$ 中的一个 $H^{(p)}$ 型点集。$H^{(1)}$ 型点集就是 H 型点集。

定理 2.6 $[0,2\pi]$ 中的任意 $H^{(p)}$ 型点集为 U 集。

证明：设 E 为 $[0,2\pi]$ 中一个 $H^{(p)}$ 型点集，$2\pi x\in E$，得 $x\in[0,1]$。点 x 的全体 E_0 构成 $H^{(p)}$ 型点集，于是有格子点列 $\{(n_1^{(l)},n_2^{(l)},\cdots,n_p^{(l)})\}$，当 $x\in E_0$ 时

$$n_1^{(l)}x\notin\Omega_1\quad n_2^{(l)}x\notin\Omega_2\quad\cdots\quad n_p^{(l)}x\notin\Omega_p$$

Ω_1、Ω_2、$\cdots$、Ω_p 为 p 个区间，组成 Ω。作 p 个函数

$$\varphi_q(x+1)=\varphi_q(x)\qquad(q=1,2,\cdots,p)$$

分别在 Ω_q 的外部为零，在 Ω_q 上取正值，$\int_0^1\varphi_q(x)\mathrm{d}x=1$ 且 $\varphi_q(x)$ 的傅

里叶级数$\varphi_q(x)=\sum_m \beta_m^{(q)}\exp(2\pi imx)$快速收敛于$\varphi_q(x)$，置

$$f_l(x)=\varphi_1[(n_1^{(l)}x)]\varphi_2[(n_2^l x)]\cdots\varphi_p[(n_p^l x)]$$

则当$2\pi x\in E$时$f_l(x)=0$，另取

$$f_l(x)=\sum_p a_p^{(l)}\exp(2\pi ipx)$$

有依$\varphi_q[n_q^{(l)}x]=\varphi_q(n_q^{(l)}x)$，推出

$$\varphi_q[(n_q^{(l)}x)]=\sum_m \beta_m^{(q)}\exp[2\pi in_q^{(l)}x]$$

因为$\varphi_q(x)$的级数均快速收敛，所以$f_l(x)$的级数也快速收敛，且

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|a_p^{(l)}|\leqslant\sum_m|\beta_m^{(1)}|\sum_m|\beta_m^{(2)}|\cdots\sum_m|\beta_m^{(p)}|<\infty$$

现讨论数列$\{a_0^{(l)}\}$、$\{a_1^{(l)}\}$、…的极限$\lim\limits_{l\to\infty}a_j^{(l)}$。设$\sum_m|\beta_m^{(q)}|(q=1,2,\cdots,p)$都小于常数$C$。给$\varepsilon>0$，存在$\mu$，使

$$|\beta_{\mu+1}^{(q)}+\beta_{\mu+2}^{(q)}+\cdots|<\varepsilon(2C)^{-p}C$$

$$T_l^{(q)}(x)=\sum_{m=-\mu}^{\mu}\beta_m^{(q)}\exp[2\pi imn_q^{(l)}x]$$

$$\gamma_l^{(q)}(x)=\sum_{|m|>\mu}\exp[2\pi imn_q^{(l)}x]$$

于是

$$|T_l^{(q)}(x)|\leqslant C\qquad|\gamma_l^{(q)}(x)|<\varepsilon(2C)^{-p}C$$

$$f_l(x)=\prod_{q=1}^{p}[T_l^{(q)}(x)+\gamma_l^{(q)}(x)]$$

$$=\prod_{q=1}^{p}T_l^{(q)}(x)+\rho_l(x)=T_l(x)+\rho_l(x)$$

而$|\rho_l(x)|<\varepsilon(0\leqslant x\leqslant1)$，有$|f_l(x)-T_l(x)|<\varepsilon$。

三角多项式$T_l(x)$为$T_l^{(q)}(x)$的乘积，其系数除了$\exp\{2\pi i[m_1n_1^{(l)}+m_2n_2^{(l)}+\cdots+m_pn_p^{(l)}]x\}$（$m_j$为整数）的系数之外均为零。当$m_1^2+m_2^2+\cdots+m_p^2>0$时

$$\lim_{l\to\infty}|m_1n_1^{(l)}+m_2n_2^{(l)}+\cdots+m_pn_p^{(l)}|=\infty$$

综合$\int_0^1\varphi_q(x)\mathrm{d}x=1$知，当$l$充分大时

$$\int_0^1 T_l(x)\mathrm{d}x = 1$$

应用 $|f_l(x) - T_l(x)| < \varepsilon$，得

$$|1-\int_0^1 f_l(x)\mathrm{d}x|<\varepsilon$$

据此，$a_0^{(l)} = 1 + o(1)(l \to \infty)$。另外证明

$$\lim_{l\to\infty} a_j^{(l)} = 0 \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

对于 $|j| > 0$，

$$a_j^{(l)} = \int_0^1 \{[f_l(x) - T_l(x)] + T_l(x)\}\exp(-2\pi ijx)\mathrm{d}x$$

而

$$\left|\int_0^1 [f_l(x) - T_l(x)]\exp(-2\pi ijx)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

$$T_l(x)\exp(-2\pi ijx)$$
$$= \exp(-2\pi ijx) + \sum_l \gamma_l \exp\{2\pi ix[m_1 n_1^{(l)} + m_2 n_2^{(l)} + \cdots + m_p n_p^{(l)}] - 2\pi ijx\}$$

注意到$(n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \cdots, n_p^{(l)})$的互不相倚，一切$\gamma_l$都是$o(1)(l\to\infty)$，即$a_j^{(l)}=o(1)(l\to\infty, j\neq 0)$

从函数列$f_l(x)$出发可以证明E为U集。若E为M集，则存在概斂于零（在E的外部收斂于零）而不全为零的级数$\sum_n c_n e^{inx}$。作$\sum_n c_n e^{inx}$、$\sum_m a_m^{(l)} e^{imx}$的乘积级数$\sum_m c^{(l)} e^{imx}$。将证

$$\lim_{l\to\infty} c_m^{(l)} = c_m \lim_{l\to\infty} a_0^{(l)}$$

由于$\sum_m a_m^{(l)} e^{imx}$在点集E上收斂于零，因此$\sum_n c_n^{(l)} e^{inx}$在E上收斂于零。又由$\sum_n c_n e^{inx}$在E的任意余补区间上收斂于零，有$\sum_m c_m^{(l)} e^{imx}$处处收斂于零，即$c_m^{(l)}=0$。如此，$c_n=0(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，导致矛盾，表明$E$为$U$集。

今研究上述系数极限等式。令

$$\gamma_m = \max\{|c_{\pm m}|, |c_{\pm c_{m+1}}|, |c_{\pm(m+2)}|, \cdots\}（当 N>|n| 时）$$

$$c_n^{(l)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(l)} c_{n-m} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sum_{m=-N}^{N} a_m^{(l)} c_{n-m} \\ \sigma_2 = \sum_{m=-\infty}^{-N-1} a_m^{(l)} c_{n-m} \\ \sigma_3 = \sum_{m=N+1}^{+\infty} a_m^{(l)} c_{n-m} \end{cases}$$

推出

$$\lim_{l\to\infty}\sigma_1 = a_0^{(l)} c_n + \sum_{m=-N}^{N} a_m^{(l)} c_{n-m} = a_0 c_n \qquad (m \neq 0)$$

式中　$a_0 = \lim_{l\to\infty} a_0^{(l)} = 1$，对 $m > N > |n|$，$|c_{n-m}| \leqslant \gamma_{N-n}$

$$|\sigma_3| \leqslant \gamma_{N-n} A$$

故　$\lim_{l\to\infty} c_n^{(l)} = c_n a$。

2.3　点集 E 与正数 θ 的乘积 E_θ

取 $x \in E$、$\theta > 0$，所有 $x\theta$ 组成的点集记作 E_θ。现讨论当 E 为 U 集时 E_θ 落入 $[0, 2\pi]$ 中或部分或全部成为 U 集的问题。

定理 2.7　设 E 为 U 集。若当 $0 < \theta < 1$ 时 $E_\theta \subset [0, 2\pi]$ 则 E_θ 为 U 集

命 $C(s)$ 为 s 的偶函数，称

$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_{-\omega}^{\omega} C(s) e^{isx} \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} C(s) e^{isx} \mathrm{d}s \tag{2.6}$$

为三角积分。对 $E(-\infty, +\infty)$，在余集 $CE = (-\infty, +\infty) \backslash E$ 上式 (2.6) 收敛于零；当 $C(s)$ 概敛于零时称 E 为三角积分的 U 集，不成 U 集的点集为 M 集。

定理 2.8　三角级数的 U 集为三角积分的 U 集。若 E 为三角积分的 U 集，则 E 处于长为 2π 的任意区间中的部分成为三角级数的 U 集。

如果 U 集 E 所构成的点集 E_θ 为 M 集，那么依定理 2.8 知 E_θ 也

是三角积分的M集。于是有三角积分为

$$J(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(u)e^{iux}\mathrm{d}u$$

当$x\notin E_\theta$时$J(x)=0$，但$\gamma(u)$并非概等于零。当$\eta\notin E$时$J(\theta\eta)=0$。取$\gamma^*(u)=\frac{1}{\theta}\gamma\left(\frac{u}{\theta}\right)$，导出

$$J^*(\eta)-\int\gamma^*(u)e^{iu\eta}\mathrm{d}u=0$$

可$\gamma^*(u)$并非概等于零，也就是E变成了三角积分的M集，表明定理2.7成立。

定理2.9 设$Y(t)$在有限区间上为有界变差，在无穷远满足

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}|Y(\lambda+h)-Y(\lambda)|=0$$

当区间J的长小于2π时有三角级数$\sum\limits_n c_n e^{inx}$符合$c_n=o(1)$以及

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega}e^{i\lambda x}\mathrm{d}Y(\lambda)-\sum_{|n|\leqslant\omega}c_n e^{inx}\right\}=0\quad(x\in J)$$

且有极限

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega}(-i\,\mathrm{sign}\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}Y(\lambda)-\sum_{|n|\leqslant\omega}(-i\,\mathrm{sign}n)c_n e^{inx}\right\}$$

定理2.10 设$L(x)$具有五次导数，其在$J=[a,b]$上为1、在$J_\varepsilon=[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$的外部为零，则在$J$上均匀地成立着

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\omega}^{\omega}e^{i\lambda x}\mathrm{d}Y(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{J_\varepsilon}F(t)L(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\sin[\omega(x-t)]}{x-t}\mathrm{d}t=0$$

其中$Y(\lambda)$满足定理2.9中的条件，

$$F(x)=-\int_{|\lambda|\leqslant 1}\frac{e^{i\lambda x}-1-i\lambda x}{\lambda^2}\mathrm{d}Y(\lambda)-\int_{|\lambda|\geqslant 1}\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^2}\mathrm{d}Y(\lambda)$$

设N为正整数、$\omega=N+\frac{1}{2}$、J_0是长为2π的区间，其内部包括有闭区间J_0又设$L(x)$具有五次导数并在J上为1、在J_0外部$(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$为零，这样

$$\int_{J_0}F(x)L(x)e^{-inx}\mathrm{d}x=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

再设 FL 为以 2π 作周期的周期函数，三角级数 $\sum_n c_n e^{inx}$ 为把 $\mathscr{S}[FL]$ 逐次求导两次所得，$c_n=o(1)$；$c_0=0$。它的部分和为

$$\sum_{|n|\leqslant N} c_n e^{inx} = \frac{1}{\pi}\int_{J_0} F(t)L(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\sin[\omega(x-t)]}{2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\mathrm{d}t$$

如果 $N\to\infty$ 有

$$\int_{J_0} F(t)L(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left\{-\frac{\sin[\omega(x-t)]}{2\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin[\omega(x-t)]}{x-t}\right\}\mathrm{d}t$$
$$=o(1)$$

在 J 上均匀地成立，那么依定理 2.9 知在 J 上均匀地成立着

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left[\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x}\mathrm{d}Y(x)-\sum_{|n|\leqslant\omega} c_n e^{inx}\right]=0$$

记 $y(x-t)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)-\frac{1}{x-t}$，欲证当 $\omega\to+\infty$ 时在 J 上

$$I=\int_{J_0} F(t)L(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\{y(x-t)\sin[\omega(x-t)]\}\mathrm{d}t$$

匀敛于零。计算出两次导数的结果，上式分成 3 个积分和，即

$$I_1=-\omega^2\int_{J_0} F(t)L(t)y(x-t)\sin[\omega(x-t)]\mathrm{d}t$$

$L(t)y(x-t)$ 关于 t 可以求导 5 次，其在 J_0 外部为零。如前所述可得 $I_1=o(1)$。另

$$I_2=-2\omega\int_{J_0} F(t)L(t)\cos[\omega(x-t)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(x-t)\mathrm{d}t$$

$$I_3=\int_{J_0} F(t)L(t)\sin[\omega(x-t)]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(x-t)\mathrm{d}t$$

易知 $I_2=I_3=o(1)$，从而 $I=o(1)$。

2.4 特殊的 M 集和特殊的 U 集

定理 2.11 完全点集 P 成为 M 点集的充要条件是存在具有

下列性质的函数$F(x)$：

(1) 在P的任意余补区间上$F(x)$为常数，但$F(x)$并非都等于一个常数；

(2) $F(x)=Ax+B+\Phi(x)$，$\Phi(x)$的傅里叶系数为$o\left(\frac{1}{n}\right)$。

证明：必要性，设δ_1、δ_2、…为完全点集P的所有余补区间，则由于P是M集，存在三角级数$\sum_n c_n e^{inx}$在任意δ_n上收敛于0而c_n并非都是0。因为$\sum_n c_n e^{inx}$概收敛，所以$c_n=o(1)$。级数$C+c_0x-\sum_n i\frac{c_n}{n}e^{inx}(n\neq 0)$概敛于一个函数$F(x)$；在任意$\delta_n$上，

$$F(x)=C+c_0x-\sum_n i\frac{c_n}{n}e^{inx}\qquad (n\neq 0)$$

为常数。就整体而言，其是连续的，而不是全等于一个常数，事实上c_n不是每个都为零。取$\Phi(x)=\sum_n i\frac{c_n}{n}e^{inx}(n\neq 0)$，即有定理所述的形式。

充分性，设对完全点集P，存在函数

$$F(x)=Ax+B+\Phi(x)$$

满足定理条件(1)、(2)。由于$\Phi(x)$的傅里叶系数是$o\left(\frac{1}{n}\right)$，因此$\Phi(x)$的傅里叶级数概敛于$\Phi(x)$，且$F(x)$可表述成

$$F(x)=Ax+B_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_n}{n}e^{inx}\qquad (n\neq 0,\gamma_n=o(1))$$

它的逐项导数级数$A+\sum_n i\gamma_n e^{inx}$的系数为$i\gamma_n=o(1)$。后者的两次逐项积分级数就是$F(x)$所表达级数的逐项积分，匀敛于一个函数$\psi(x)$，这是$A+\sum_n i\gamma_n e^{inx}(n\neq 0)$的黎曼函数。因为$F(x)$在任意$\delta_n$上为常数，所以$\psi(x)$在任意$\delta_n$上为一次函数。从而

$$\mathscr{D}^2\psi(x)=0\qquad (x\in\delta_n;n=1,2,\cdots)$$

据此可知$A+\sum_n i\gamma_n e^{inx}$在$P$的外部收敛于0。可是$A$、$\gamma_n$并非均等

于0，否则$F(x)$将是常数，即P为M点集。

定理2.12 设$E_0=[0,2\pi]$，E_n为2^n个区间组成的点集，把E_n的2^n个区间中的每个区间三等分，并除去其中央区间的内点而得E_{n+1}，故交集$E=E_0\cap E_1\cap E_2\cdots$为测度等于零的完全点集，成为$M$集。

证明：从E_0逐次除去的所有区间之长的和为1，因此测度$|E|=|-|=0$，即E为完全点集。

另设$0<\varepsilon_1<\cdots(\varepsilon_n\to 0)$。从$\mathscr{E}_0=[0,2\pi]$除去常为$\frac{1}{2}|\mathscr{E}_0|\varepsilon_1=\pi\varepsilon_1$，而与$\mathscr{E}_0$同中点的区间所得$\mathscr{E}_1$，它是由两个闭区间组成且测度$|\mathscr{E}_1|=2\pi(1-\varepsilon_1)$。从$\mathscr{E}_1$的两个区间除去同中心的两个开区间，其长均为$\frac{1}{2}|\mathscr{E}_1|\varepsilon_1$。一般而言，从$\mathscr{E}_n$所组成的$2^{n+1}$个区间各除去在同中心的开区间，其长均为$\frac{1}{2^{n+1}}|\mathscr{E}_n|\varepsilon_n$，如此$n$次，在$[0,1]$中所得测度为

$$2\pi(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_n)$$

的完全集P_n，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$为完全点集，$|P|=2\pi\prod\limits_n(1-\varepsilon_n)$，当$\sum\limits_n\varepsilon_n=\infty$时$|P|=0$。

当第m次时从$[0,1]$除去了2^m-1个区间，从左到右记这些区间为δ_1、δ_2、…、δ_{2^m-1}。构造折线函数$F_m(x)$使

$$F_m(0)=F(2\pi)=0$$

$$F_m(x)=k2^{-m+1}\qquad (x\leqslant\pi;x\in\delta_k;k=1,2,\cdots)$$

$$F_m(x)=2-k2^{-m+1}\qquad (x\geqslant\pi;x\in\delta_k)$$

令$S_m=\delta_1\cup\delta_2\cup\cdots\cup\delta_{2^m-1}$，这是由这些区间组成的点集。显然在$S_m$上$F_{m+1}(x)=F_m(x)$、$F'_m(x)=0$。在$[0,2\pi]\backslash S_m$上，

$$|F_{m+1}(x)-F_m(x)|\leqslant\frac{1}{2^m}\varepsilon_{m+1}$$

$$F'_m(x)=\pm\frac{2}{|P_m|}$$

若$\eta_m=\max\limits_{k>m}\varepsilon_k$，则$|F(x)-F_m(x)|\leqslant\eta_m 2^{-m+1}$在$[0,2\pi]$上成立，表明$F(x)$存在。$F(x)$在$P$的任意余补区间上为常数，但不是全等于常数。依定理2.11，如果$F(x)$的傅里叶系数为$o\left(\frac{1}{n}\right)$，那么$P$为任意$M$集。对于正整数$n$，存在唯一的$m$满足

$$\frac{2^{m-1}}{|P_{m-1}|\sqrt{\eta_{m-1}}}\leqslant n<\frac{2^m}{|P_m|\sqrt{\eta_m}}$$

今证

$$I_m=n\int_0^{2\pi}F(x)e^{-inx}\mathrm{d}x=o(1)$$

记$I_m=I_m^{(1)}+I_m^{(2)}$，其中

$$I_m^{(1)}=n\int(F-F_m)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

$$I_m^{(2)}=n\int F_m e^{-inx}\mathrm{d}x$$

因为$F(x)=F_m(x)$在S_m上成立，$|F-F_m|<\eta_m 2^{-m+1}$，所以

$$|I_m^{(1)}|\leqslant n\eta_m 2^{-m+1}|P_m|<2\sqrt{\eta_m}=o(1)$$

又$F(0)=F(2\pi)=0$，得

$$I_m^{(2)}=-i\int_0^{2\pi}F'_m(x)e^{-inx}\mathrm{d}x=-i\int F'_m(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

在P_m的各个区间上$|F'_m|=\frac{2}{|P_m|}$，区间的个数为2^m，有$I_m^{(2)}<\frac{2}{|P_m|}$

$$\frac{2}{n}2^m<\frac{2}{|P_m|}\frac{2|P_{m-1}|\sqrt{\eta_{m-1}}}{2^{m-1}}2^m=\frac{8\sqrt{\eta_{m-1}}}{1-\varepsilon_m}=o(1)$$

故$I_m=I_m^{(1)}+I_m^{(2)}=o(1)$

定理2.13 若有界变差的函数$F(x)(0\leqslant x<2\pi)$在完全点集$P\subset[0,2\pi]$的任意余补区间上为常数而不全等于一个常数，则当$n\to\pm\infty$时有

$$\int_0^{2\pi}e^{-inx}\mathrm{d}F(x)=o(1)\tag{2.7}$$

P为M点集。

证明：函数$\Phi(x)=F(x)-\left[F(o)+\frac{F(2\pi)-F(o)}{2\pi}x\right]$满足

$$\Phi(o)=0 \qquad \Phi(2\pi)=0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx}\mathrm{d}\Phi=\int_0^{2\pi} e^{-inx}\mathrm{d}F=o(1)$$

另一方面，

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx}\mathrm{d}\Phi=in\int_0^{2\pi}\Phi(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

其为$o(1)$；依定理2.11，P 为M 点集。

从$\rho^{(0)}=[0,2\pi]$、$|\rho^{(0)}|=2\pi$除去同中心的开区间而得两个长为$\rho^{(1)}$的区间，经过$k-1$次除去后，剩下长为$\rho^{(k)}$的闭区间有2^k个。当$2^k\rho^{(k)}\to 0$时，称剩下的完全点集P为对称完全集。若$\frac{\rho^{(k+1)}}{\rho^{(k)}}$等于一个常数$\xi$，则称$P$为定比对称点集，这是一个测度为0的完全点集。当$\xi=\frac{1}{3}$时$P$为康托尔完全点集。对于$\theta$为整系数$c_1$、$c_2$、…、$c_n$的代数方程

$$x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=0$$

的根，于是θ为代数整数。此时

$$x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=(x-\theta)(x-\theta_1)\cdots(x-\theta_{n-1})$$

$$|\theta_1|<1 \quad |\theta_2|<1 \quad \cdots \quad |\theta_{n-1}|<1$$

式中θ_1、θ_2、…、θ_{n-1}为θ的共轭数，称θ为皮索(Pisot)数；n为θ次数。

定理2.14　以ξ为定比的定比对称集构成M集的充要条件为$\theta=\frac{1}{\xi}$不是皮索数。

证明：首先证明当$\theta=\frac{1}{\xi}$不为皮索数时，以ξ为定比的对称点集P为M集。当$x\in P$时存在一列ε_k，ε_k或为0或为1，其满足

$$x=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2\xi+\cdots+\varepsilon_k\xi^{k-1}+\cdots)(1-\xi)$$

第k次所除去的每个区间的长等于$2\xi^{k-1}(1-2\xi)$，区间数为2^{k-1}；每个区间右端$\varepsilon_k=1$，当$j>k$时$\varepsilon_j=0$。剩下的开区间的个数为2^k，记

$\rho_1^{(k)}$、$\rho_2^{(k)}$、…作为函数

$$F(x) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \cdots$$

$$x = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \xi^{k-1}(1-\xi)$$

可以证明

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} \mathrm{d}F = \theta^{\pi in} \prod_{j=1}^{\infty} \cos[\pi n \xi^{j-1}(1-\xi)]$$

事实上，

$$I_n^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sum_k \exp[2\pi in(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\xi + \cdots + \varepsilon_k \xi^{k-1})(1-\xi)]$$

但 $\varepsilon_l = 0$、1；且

$$I_n^{(k)} = \frac{1}{2^k} \prod_{j=1}^{k} \{1 + \exp[2\pi in\xi^{j-1}(1-\xi)]\}$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \exp[\pi in\xi^{j-1}(1-\xi)]\cos[\pi n\xi^{j-1}(1-\xi)]$$

推证中利用了$\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}=\cos a$ 及 $1+\xi+\xi^2+\cdots=\frac{1}{1-\xi}$，得

$$I_n = e^{\pi in} \prod_{j=1}^{\infty} \cos[\pi n\xi^{j-1}(1-\xi)] = \int_0^{2\pi} e^{inx} \mathrm{d}F$$

故依定理2.13，问题归结为证明$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = o(1)$。这需要利用皮索定理，即

皮索定理 若有$\lambda \geqslant \frac{1}{\theta}$使级数 $\sum\limits_m \sin^2(\pi\lambda\theta^m)$ 收敛，则θ 为皮索数。

设 $0<\xi<1$，当$t \to \pm\infty$时如果

$$I(t) = \prod_j |\cos(\pi t\xi^{j-1})| \neq o(1)$$

那么$\theta = \frac{1}{\xi}$为皮索数。令$I(t) \neq o(1)$，于是有$t_s \uparrow \infty$及正数a 满足

$$I(t_s) > a \qquad (s=1,2,\cdots)$$

对于s，有正整数n 符合$\theta^{n-1} < t_s \leqslant \theta^n$。从而有$t_s = \lambda_s \theta^n$、$\frac{1}{\theta} < \lambda_s \leqslant 1$，

$\{\lambda_s\}$中有子序列$\lambda_q \to \lambda$，$\frac{1}{\theta} \leqslant \lambda \leqslant 1$。因为$a < I(t_q)$，又

$$I(t_q) = I[\lambda_q \theta^{n(q)}] \leqslant |\cos(\pi\lambda_q)\cos(\pi\lambda_q\theta)\cdots\cos[\pi\lambda_q\theta^{n(q)}]|$$

所以

$$\prod_{j=0}^{n(q)}[1 - \sin^2(\pi\lambda_q\,\theta^j)] \geqslant a^2$$

$$\exp[-\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2(\pi\lambda_q\,\theta^j)] \geqslant a^2$$

$$\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2(\pi\lambda_q\theta^j) \leqslant \log\frac{1}{a^2} \qquad (q = 1,2,\cdots)$$

$$\sum_{j=0}^{n(r)}\sin^2(\pi\lambda_r\theta^j) \leqslant \log\frac{1}{a^2} \qquad (r > q)$$

这样就能顺序得到

$$\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2(\pi\lambda_r\theta^j) \leqslant \log\frac{1}{a^2}$$

$$\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2(\pi\lambda\theta^j) \leqslant \log\frac{1}{a^2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sin^2(\pi\lambda\theta^j) \leqslant \log\frac{1}{a^2} \qquad \left(\frac{1}{\theta} \leqslant \lambda \leqslant 1\right)$$

由皮索定理知θ是皮索数，这与假定矛盾，表明以$\xi = \frac{1}{\theta}$为定比的对称完全点集是M集。

其次证明上述论断之逆。设P为以$\xi = \frac{1}{\theta}$为定比的完全点集。为此需证：当θ为皮索数时P不是M集而是U集。若θ为n次皮索数，则当$\theta > 2$时存在正数λ、整数N满足

$$\frac{\lambda}{(\theta - 1)\theta^N} + \sum_{m=0}^{\infty}|\{\lambda\,\theta^m\}| < \theta^* \qquad (2.8)$$

式中$\theta^* = \frac{2^{-\frac{N}{n}}}{8}$，$\{\lambda\theta^m\}$表示$\lambda\theta^m$的小数部分；称式(2.8)为皮索不等式。对于$x \in P$，$x$可表达成

$$x = 2\pi(\theta - 1)\left(\frac{\varepsilon_1}{\theta} + \frac{\varepsilon_2}{\theta^2} + \cdots\right) \qquad (\varepsilon_m(\varepsilon_m - 1) = 0; \theta > 2)$$

证明P为U集就是证明：符合

$$x=\frac{\varepsilon_1}{\theta}+\frac{\varepsilon_2}{\theta^2}+\frac{\varepsilon_3}{\theta^3}+\cdots$$

的所有x构成一个U集Q。当$x\in Q$时

$$\lambda\theta^m x = \lambda\theta^m\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\varepsilon_l}{\theta^l}+\sum_{l=m+1}^{m+N}\frac{\varepsilon_l}{\theta^l}+\sum_{l=m+N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_l}{\theta^l}\right)$$

$$\lambda\theta^m = c_m + \delta_m \qquad (c_m\text{ 为整数})$$

于是存在式

$$\lambda|\theta^{m-1}\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n| \equiv |\delta_{m-1}\varepsilon_1+\cdots+\delta_0\varepsilon_m|\left(\leqslant\sum_{l=0}^{m}|\delta_l|\right)(\mathrm{mod}1)$$

$$\lambda\left|\sum_{l=m+N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_l}{\theta^l}\theta^m\right|\leqslant\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N}$$

依皮索不等式知

$$\left|\{\lambda\theta^m x\}-\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\right|<\theta^*$$

置$g_m=\left\{\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\right\}$，有

$$|\{\lambda\theta^m x\}-g_m|<\theta^*$$

将$(g_{k+1},g_{k+2},\cdots,g_{k+n})$作为$n$维欧几里德空间中的一个点$O_k$。由于$\varepsilon_{k+1}$、$\varepsilon_{k+2}$、$\cdots$、$\varepsilon_{k+N}$或取0或取1，因此$O_k$的位置限于$2^{N+n-1}$个中的一个。对于$x\in Q$，得到点$P_k=(g_{k+1},g_{k+2},\cdots,g_{k+n})$，$P_k$或落在以$O_k$为中心、边长$2\theta^*$的$n$维正方体中，或落在中心与$O_k$相距为1的同样大小的$n$维正方体中。这样的正方体有$2^{N+2n-1}$个，共同部分的体积不超过$\frac{1}{2}$。故单位正方体中包括一个$n$维正方体，其内无$P_k$的任何点。由于$\lambda\theta^m=c_m+\delta_m$、$\delta_m=o(1)$，因此当$x\in Q$时$(\{c_{k+1}x\},\{c_{k+2}x\},\cdots,\{c_{k+n}x\})\notin\Omega$，$\Omega$为$n$维正方体。注意到$(c_{k+1},c_{k+2},\cdots,c_{k+n})$互不相倚，也就是说，当整数$l_1$、$l_2$、$\cdots$、$l_n$至少有一个不为零时

$$\lim_{k\to\infty}|l_1c_{k+1}+l_2c_{k+2}+\cdots+l_nc_{k+n}|=\infty$$

实际上左端之和为

$$\sum_{p=1}^{n} l_p(\lambda\theta^{k+p}-\delta_{k+p})=\lambda\theta^{k+1}\sum_{p=0}^{n-1} l_{p+1}\theta^p-\sum_{p=1}^{n} l_p\delta_{k+p}$$

θ 为n 次代数数且$\theta>2$，从而右端第一项中的和不可能为零，当$k\to\infty$时 $\lambda\theta^{k+1}\to\infty$。末项为$o(1)$，因为 $\delta_{k+p}=o(1)(k\to\infty)$，结果从 $|\sum_{p=1}^{n} l_p c_{k+p}|\to\infty$ 即知Q 为$H^{(n)}$型点集，依定理2.4，Q 为U 集，也就是说，P 不为M 集。至此定理2.14得证。

关于式(2.8)的证明。取θ_1、θ_2、…、θ_n 为互相共轭的n 次代数整数，$R(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_lx^l$ 的系数a_0、a_1、…、a_l 均为整数，于是 $C_m=\sum_{j=1}^{n} R(\theta_j)\theta_j^m(m=0,1,2,\cdots)$ 也均为整数。事实上，

$$c_m=\sum_{l=0}^{u} a_l\sum_{j=1}^{n}\theta_j^{m+l}=\sum_{l=0}^{u} a_l b_{ml}$$

b_{ml}为整数。命$u=n-1$、$\theta_n=\theta$，记$\lambda=R(\theta)$、$\mu_j=R(\theta_j)(j<n)$让$\lambda>0$，导出 $c_m=\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\theta_j^m+\lambda\theta^m$，简记第一项之和为$\delta_m$，这样因$\theta$ 为皮索数，$|\theta_j|<1(j=1,2,\cdots,n-1)$，

$$|\delta_m|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}|\mu_j||\theta_j^m|$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}|\delta_m|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\frac{|\mu_j|}{1-|\theta_j|}$$

闵可夫斯基定理　若n 个一次形式

$$L_j=a_{j_1}x_1+a_{j_2}x_2+\cdots+a_{j_n}x_n\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

的行列式$D=|a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_n}|\neq0$，则必有整数$x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 使

$$|L_j|\leqslant\sqrt[n]{D}\qquad\sum_{l=1}^{n}x_l^2>0$$

今以a_0、a_1、…、a_{n-1}为未知数，考虑n 个一次形式

$$L(\theta)=\frac{L}{(\theta-1)\theta^N}=\frac{a_0+a_1\theta+\cdots+a_{n-1}\theta^{n-1}}{(\theta-1)\theta^N}$$

$$L_j(\theta_j)=\frac{\mu_j}{1-|\theta_j|}=\frac{a_0+a_1\theta_j+\cdots+a_{n-1}\theta_j^{n-1}}{1-|\theta_j|}$$

其行列式为

$$\frac{1}{(\theta-1)\theta^N}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-|\theta_j|}\begin{vmatrix}1 & \theta & \cdots & \theta^{n-1}\\ 1 & \theta_1 & \cdots & \theta_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \theta_n & \cdots & \theta_n^{n-1}\end{vmatrix}=\frac{\omega(\theta)}{\theta^N}$$

$\omega(\theta)$ 与 N 无关。令适当大的 N 使 $\frac{\omega(\theta)}{\theta^N}<\frac{2^{-N}}{(8n)^n}$，即 $\left(\frac{2}{\theta}\right)^N<\frac{1}{(8n)^n\omega(\theta)}$。由 $\theta>2$ 知上述的 N 存在，依闵可夫斯基定理，得到

$$\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{|\mu_j|}{1-|\theta_j|}<\theta^*$$

因为 $\sum_m|\delta_m|$ 不大于上式左边，所以 $|\delta_m|<1$，从 $\lambda\theta^m=c_m+\delta_m$ 及 $[c_m]=c_m$ 推出 $|\lambda\,\theta^m|\leqslant|\delta_m|$。

命正数数列 $\{\varepsilon_n\}$ 单调趋近于零，$E\subset[0,2\pi]$。设 $|\varepsilon_n|\leqslant\varepsilon_n$（$n$ 为整数），若当三角级数 $\sum_n c_n e^{inx}$ 在余集 $CE=[0,2\pi]\setminus E$ 上收敛于 θ 时所有 $c_n=0$，则称 E 为关于 $\{\varepsilon_n\}$ 的一个 U 集，记作 $U(\{\varepsilon_n\})$；$U(\{\varepsilon_n\})$ 的测度可以大于零。

定理2.15 对任意 $\{\varepsilon_n\}(\varepsilon_n\downarrow 0)$，$U(\{\varepsilon_n\})$ 存在。$U(\{\varepsilon_n\})$ 的测度可以任意地接近于 2π。

证明：对于 $\{\varepsilon_n\}$，取 $\{\eta_t\}$：$0<\eta_t<\frac{1}{2}$，$\eta_t\to 0$，$\frac{\varepsilon_t}{\eta_t}\to 0$。固定 t，记满足 $\eta_t\leqslant\frac{tx}{2\pi}\leqslant 1-\eta_t$ 的所有 x 构成的完全点集为 P_t；当 $x\in P_t$ 时存在正整数 N_t 适合

$$2\pi(\eta_t+N_t)\leqslant tx\leqslant 2\pi(1-\eta_t)+2\pi N_t$$

P_t 的测度为 $2\pi(1-2\eta_t)$。

对 $\varepsilon>0$，取正整数 $n_1、n_2、\cdots、n_l<n_{l+1}$；符合

$$4\pi(\eta_{n_1}+\eta_{n_2}+\cdots+\eta_{n_l}+\cdots)<\varepsilon$$

于是交集 $P_{n_1}\cap P_{n_2}\cap\cdots=P$ 的余集 CP 测度为

$$|CP|\leqslant\sum_l|CP_{n_l}|<4\pi\sum_l\eta_{n_l}<\varepsilon$$

从而$|P|>2\pi-\varepsilon$。今证P为$U(\{\varepsilon_n\})$。

取$\lambda^*(x)=\lambda(x,h)$，且

$$\lambda^*(x)=\lambda(x,h)=\lambda^*(x+2\pi) \qquad \lambda^*(-1)=\lambda^*(x)$$

$$\lambda(x,h)=\begin{cases}\dfrac{3}{2h}-\dfrac{x^2}{2h^3} & (0\leqslant x\leqslant h)\\ \dfrac{(x-3h)^2}{4h^3} & (h\leqslant x\leqslant 3h)\\ 0 & (3h\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$$

$\lambda^*(x)$的傅里叶级数为

$$\lambda(x,h)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^3\cos nx\right]$$

或

$$\lambda(x,h)=\frac{2}{\pi}\left[1+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^3 e^{inx}\right] \qquad (n\neq 0)$$

令$3h_t=2\pi\eta_t$，推出在P_t上$\lambda(tx,h_t)=0$。事实上，对$x\in P_t$，

$$2\pi(\eta_t+N_t)\leqslant tx\leqslant 2\pi(1-\eta_t)+2\pi N_t$$

$$3h_t\leqslant tx-2\pi N_t\leqslant 2\pi-3h_t$$

设$|c_n|\leqslant\varepsilon_n$，作三角级数$\sum\limits_n c_n e^{inx}$及

$$\frac{\pi}{2}\lambda_t^*(x)=1+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin nh_t}{nh_t}\right)^3 e^{intx} \qquad (n\neq 0)$$

的乘积级数$\sum\limits_n c_n^{(t)}e^{inx}$。当$t=n_l$时如果$\sum\limits_n c_n e^{inx}$在$P$的外部收敛于0，则$\sum\limits_n c_n^{(t)}e^{inx}$到处收敛于0；事实上，级数$\frac{\pi}{2}\lambda^*(x)$为快速收敛并且$c_n=o(1)$，利用定理2.5，有

$$C_m^{(t)}=0 \qquad (m\text{ 为整数})$$

另外，记$\frac{\pi}{2}\lambda_t^*(x)$的傅里叶系数为$\gamma_p^{(t)}$，导出

$$C_m^{(t)}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_{m-p}\gamma_p^{(t)}=c_m+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{m-nt}\left(\frac{\sin nh_t}{nh_t}\right)^3$$

今证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m\pm nt}|\left|\frac{\sin nh_t}{nh_t}\right|^3\to 0 \qquad (t\to\infty)$$

因为 $c_{m\pm t}\to 0(t\to\infty)$，所以上式中的“$n=1$”可变为“$n=2$”。当 $t>|m|$ 时 $(n-1)t>|m|(n>1)$，结果 $|c_{m\pm nt}|\leqslant\varepsilon_t$。据此，只要证明

$$\varepsilon_t\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin nh_t}{nh_t}\right|^3\to 0 \qquad (t\to\infty)$$

左端等于

$$\frac{3}{2\pi}\frac{\varepsilon_t}{\eta_t}\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin nh_t}{n}\right|\left(\frac{\sin nh_t}{nh_t}\right)^2=O\left(\frac{\varepsilon_t}{\eta_t}\right)=o(1)$$

2.5 三角级数概表可测函数

定理 2.16 对于任意有限可测函数 $f(x)$，其 $f(x+2\pi)=f(x)$，必有三角级数几乎处处收敛于 $f(x)$。

定理 2.17 对于$[0,2\pi]$上的任意可测函数 $f(x)$ 及正数 σ，存在具有均匀收敛的傅里叶级数的函数 $g(x)$，使在$[0,2\pi]$中的点集 E 上与 $f(x)$ 一致，即当 $x\in E$ 时 $f(x)=g(x)$，且 $|E|>2\pi-\sigma$。

定理 2.18 若$[c,d]\subset[0,2\pi]$、$\varepsilon>0$，则必有连续的折线函数 $\psi(x)$，其在$[0,2\pi]\setminus[c,d]$上为零、在 E 上为常数 γ，而 $E\subset[c,d]$

$$|E|>(d-c)\left(1-\frac{5}{l}\right) \qquad (l\text{ 为正整数})$$

且

$$|\psi(x)|\leqslant 2l|\gamma|$$

$$\left|\int_0^x\psi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\psi(t)\frac{\sin[n(t-x)]}{t-x}\mathrm{d}t\right|\leqslant Bl|\gamma|$$

这里 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ $(n=1,2,\cdots)$。

证明：如果 $\gamma=0$，那么 $\psi(x)=0$ 就是所需的函数。现假定 $\gamma\neq 0$。取正整数 γ 很大，使之满足 $4|\gamma|\dfrac{d-c}{rl}<\varepsilon$。置 $\delta=\dfrac{d-c}{rl^2}$，

$$a_t=c_t-\delta \qquad c_t=c+\delta lt \qquad (t\text{ 为整数})$$

$$a=c+\frac{d-c}{l} \qquad a'=c+2\,\frac{d-c}{l}$$

$$b=d-\frac{d-c}{l} \qquad b'=d-2\,\frac{d-c}{l}$$

取折线函数 $X(T)$ 使在 (a',b') 上为 1，在 (a,b) 的外部为 0。积分 $\Gamma_t=\int_{c_{t-1}}^{c_t}X(T)\mathrm{d}T$ 满足

$$|\Gamma_{t+1}-\Gamma_t|\leqslant\frac{l\delta}{r} \qquad (t=1,2,\cdots,rl-1)$$

实际上，当 (c_{t-1},c_t) 处于 (a,b) 的外部时 $\Gamma_t=0$；处于 (a',b') 中时 $\Gamma_t=l\delta$；处于 $(a、a')$ 或 (b',b) 中时 $\Gamma_{t+1}-\Gamma_t=\pm\frac{l\delta}{r}$。命 $\frac{\Gamma_t}{l\delta}=h_t$、$\varphi(x)=h_t(x\in(a_t,c_t))$，$\varphi(x)=0 \quad (x\notin(a_t,c_t))$，$t$ 为整数。可见

$$l\int_{c_{t-1}}^{c_t}\varphi(x)\mathrm{d}x=l\delta h_t=\Gamma_t=\int_{c_{t-1}}^{c_t}X(x)\mathrm{d}x$$

设连续折线函数 $g(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 在 (a,b) 的外部等于零，在一切 (a_t',c_t') 的外部一致于 $\varphi(x)$，今证 $\psi(x)=\gamma[X(x)-\lg(x)]$ 符合定理 2.18，$\psi(x)$ 由 $X(x)$、$g(x)$ 构成，也是折线函数，在 (c,d) 的外部为零。又从 $|X|\leqslant 1$、$|g|\leqslant 1$ 得

$$|\psi(x)|\leqslant 2l|\gamma| \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

因为当 $x\notin(a_t,a'_t)$ 及 $x\notin(c'_t,c_t)$ 时

$$\varphi(x)-g(x)=0 \qquad |\varphi(x)-g(x)|\leqslant 1$$

所以

$$\int_0^{2\pi}|g(T)-\varphi(T)|\mathrm{d}T\leqslant\sum_T\left(\int_{a_t}^{a'_t}\mathrm{d}T+\int_{c'_t}^{c_t}\mathrm{d}T\right)<2\delta$$

记 $\psi^*(x)=\gamma[X(x)-l\varphi(x)]$，足见

$$\left|\int_0^x[\psi^*(T)-\psi(T)]\mathrm{d}T\right|<2|\gamma|l\delta<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

若 $x\leqslant c$，则 $\psi^*(T)$ 在 $(0,x)$ 上的积分为零。当 $c<x$ 时有 $[c_k,c_{k+1}]$ 含 x，这样 $\psi^*(T)$ 在 $(0,x)$ 上的积分等于其在 (c_k,x) 上的积分，据此，

$$\left|\int_{c_k}^{x}\psi^*(T)\mathrm{d}T\right|\leqslant|\gamma|\int_{c_k}^{c_{k+1}}X(T)\mathrm{d}T+l|\gamma|\int_{c_k}^{c_{k+1}}\varphi(T)\mathrm{d}T$$

$$\leqslant 2l\delta|\gamma|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

得

$$\left|\int_{0}^{x}\psi(T)\mathrm{d}T\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\qquad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

由(a',b')除去的所有(a_t,c_t)而得到点集E,因

$$b'-a'=(d-c)\left(1-\frac{4}{l}\right)$$

推出$|E|>b'-a'-\dfrac{d-c}{l}=(d-c)\left(1-\dfrac{5}{l}\right)$。在$E$上$\psi(x)=\gamma$。今估计积分

$$L_n(\lambda;\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\lambda(T)\frac{\sin[n(T-x)]}{T-x}\mathrm{d}T$$

当$\lambda(T)(\alpha\leqslant T\leqslant\beta)$为线性函数时$|\lambda(T)|\leqslant M$,并可导出

$$|L_n(\lambda;\alpha,\beta)|\leqslant M\left|\int\frac{\sin[n(T-x)]}{T-x}\mathrm{d}T\right|\leqslant 4\pi M$$

函数$X(T)$是由5个这样的$\lambda(T)$组成,$|X(T)|\leqslant 1$,即有

$$\left|\int_{0}^{2\pi}X(T)\frac{\sin[n(T-x)]}{T-x}\mathrm{d}T\right|\leqslant 20\pi$$

显然$|L_n(g;0,2\pi)|<C_0$(绝对常数),故

$$|L_n(\psi;0,2\pi)|\leqslant|\gamma|(20\pi+lC_0)\leqslant lB|\gamma|$$

定理2.17的证明:因为$f(x)$是有限可测函数,所以存在如下的连续函数$\Phi(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$:在$\left(\dfrac{\sigma}{4},2\pi-\dfrac{\sigma}{4}\right)$中的一个完全点集$P$上 $\Phi(x)=f(x)$、$|P|>2\pi-\dfrac{3}{4}\sigma$;在$\left[0,\dfrac{\sigma}{8}\right]$、$\left[2\pi-\dfrac{\sigma}{8},2\pi\right]$上$\Phi(x)=0$;在$\left(\dfrac{\sigma}{8},\dfrac{\sigma}{4}\right)$、$\left(2\pi-\dfrac{\sigma}{4},2\pi-\dfrac{\sigma}{8}\right)$上$\Phi(x)$为一次的。如果对于$\Phi(x)$可找到$\mathscr{Y}[g]$匀敛的$g(x)$,它在测度大于$2\pi-\dfrac{\sigma}{4}$的一个点集$E_0$上一致收敛于$\Phi(x)$,那么在交集$E=P\cap E_0$上,

$$g(x)=\Phi(x)=f(x)$$

并且$|E|>2\pi-2\dfrac{\sigma}{8}-\dfrac{2}{4}\sigma-\dfrac{1}{4}\sigma=2\pi-\sigma$。由此只要以$\Phi(x)$证明定理即可。也就是说，证明归结于建立如下的命题：对于连续函数$\Phi(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，它在$[A,B]\subset(0,2\pi)$的外部为零，存在$\mathscr{Y}[g]$匀敛的$g(x)$适合

$$g(x)=f(x)\qquad\qquad |E|>2\pi-\sigma$$

式中$x\in E$、$\sigma>0$。对于连续函数$\Phi(x)$，存在阶梯函数$\Phi_m(x)$符合

$$\Phi_m(x)=0\qquad\qquad x\in(0,A)\cup(B,2\pi)$$

$$|\Phi_m(x)|<\frac{\sigma}{4^m}$$

以及$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\Phi_m(x)=\Phi(x)$，这是可能的。固定$m$，将$[0,2\pi]$分成有限个区间$\rho_1^{(m)}$、$\rho_2^{(m)}$、…；在每个$\rho_j^{(m)}$上$\Phi_m(x)$为常数，把

$\rho_1^{(1)}$、$\rho_2^{(1)}$、…、$\rho_{l_1}^{(1)}$，$\rho_1^{(2)}$、$\rho_2^{(2)}$、…、$\rho_{l_2}^{(2)}$，…，$\rho_1^{(m)}$、$\rho_2^{(m)}$、…、$\rho_{l_m}^{(m)}$，…写成v_1、v_2、…而保留上记的顺序。令$A_m=l_1+l_2+\cdots+l_m$，于是当$A_{m-1}<t\leqslant A_m$时$v_t=\rho_j^{(m)}$，当$x\in v_t$时$\Phi_m(x)=\gamma_t$、$|\gamma_t|\leqslant\dfrac{\sigma}{4^m}$。

固定t，将v_t作为定理2.18中的$[c,d]$，则有定理2.18中的$\psi(x)=\psi_t(x)$、$\psi_t(x)=0\quad(x\notin v_t)$，$|\psi_t(x)|\leqslant 2l|\gamma_t|$。在$v_t$中的一个点集$E_t$上$\psi_t(x)=\gamma_t$，

$$|E_t|>|v_t|\left(1-\frac{5}{l}\right)>|v_t|\left(1-\frac{\sigma}{2\pi 2^m}\right)$$

取$l=2^{m+3}\left(1+\left[\dfrac{2\pi}{\sigma}\right]\right)$、$\varepsilon_t=\varepsilon=\dfrac{1}{(tn_t)^2}(n_t\uparrow\infty)$，推出

$$\left|\int_0^x\psi_t(T)\mathrm{d}T\right|<\frac{1}{(tn_t)^2}\qquad\qquad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\psi_t(T)\,\frac{\sin[n(T-x)]}{T-x}\mathrm{d}T\right|<\frac{A}{2^m}$$

在$v_t(A_{m-1}<t\leqslant A_m)$上置$g_m(x)=\psi_t(x)$，有

$$g_m(x)=\Phi_m(x)\qquad\qquad(E_t\subset v_t)$$

据此知 $g_m(x) = \Phi_m(x)$ 在 $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{t=A_{m+1}}^{A_m} E_t$ 上成立。由于

$$\left| \bigcup_{t=A_{m-1}+1}^{A_m} E_t \right| > \left(1 - \frac{\sigma}{2\pi\sigma^m}\right) \bigcup_t v_t = 2\pi\left(1 - \frac{\sigma}{2\pi 2^m}\right)$$

因以 $|E|>2\pi-\sigma$。又

$$|g_m(x)| \leqslant 2l|\gamma_t| \leqslant 2 \cdot 2^{m+3}\left(1+\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right]\right)\frac{\sigma}{4^m}<\frac{64\pi}{2^m}$$

进而 $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)$ 为连续函数。

接下来证明 $\mathscr{S}[g]$ 匀敛。记 $\mathscr{S}[g]$ 的部分和为 $S_n(x)$，注意到 $g(x) = \sum_m g_m(x) = \sum_t \psi_t(x)$ ，这样有

$$S_n(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_t(T) \frac{\sin[n(T-x)]}{T-x} \mathrm{d}T + o(1)$$

式中 $o(1)$ 与 x 无关。再证 $S_n(x)$ 匀敛于 $g(x)$。

先确定 $\{n_t\}$。命 $n_1=1$，当给定 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-1}$ 时，可得到折线函数 $\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_{k-1}(x)$ 满足

$$|J_{n_1}(x)+J_{n_2}(x)+\cdots+J_{n_{k-1}}(x)-\psi_1(x)-\psi_2(x)-\cdots-\psi_{k-1}(x)| < \frac{1}{k} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

J_{n_t} 为上记 $S_n(x)$ 的级数表达式中第 t 项。

对于 $\varepsilon>0$，有 k 使 $|\psi_k(x)+\psi_{k+1}(x)+\cdots|<\frac{\varepsilon}{4}$ 成立。也就是

$$|S_n(x) - g(x)| = \left|\sum_t J_{n_t}(x) - \sum_t \psi_t(x)\right|$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} |J_{n_t} - \psi_t| + |J_{n_k}| + \left|\sum_{t=k+1}^{\infty} J_{n_t}\right| + \left|\sum_{t=k}^{\infty} \psi_t\right|$$

$$< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4} + |J_{n_t}(x)| + \sum_{t=k+1}^{\infty} |J_{n_t}(x)|$$

$$< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{A}{2^m} + 16\sum_{t=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^t} < \varepsilon$$

而 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$。至此定理 2.17 获证。

定理2.19 若$f(x)=f(x+2\pi)$为有限可测函数，则必有连续函数$F(x)$，其导数几乎处处存在且等于$f(x)$，即$F'(x)=f(x)$；从$\mathscr{S}[F]$逐项导数而得的三角级数概敛于$f(x)$。

定理2.20 设$(a,b)\subset[-\pi,\pi]$，$P\subset(a,b)$为完全点集，其测度$|P|=0$；对于$[-\pi,\pi]$上的一个全连续函数$\Phi(x)$及正数σ，存在连续有界变差函数$X(x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，它的性质为

$$X(x)=\Phi(x)\qquad x\in[-\pi,\pi]\backslash(a,b)$$

$$\int_a^b|\mathrm{d}X(x)|\leqslant\int_a^b|\mathrm{d}\Phi(x)|$$

$$|\Phi(x)-X(x)|\leqslant\sigma\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

而$F(x)=\Phi(x)-X(x)$的傅里叶系数为$o\left(\dfrac{1}{n}\right)$。

证明：对于$[0,2\pi]$中一个测度为零的完全点集，有单调函数$g(x)$在完全点集的任意余补区间上取常数，并满足

$$g(0)=0\quad g(2\pi)=1\quad\int_0^{2\pi}e^{-inx}\mathrm{d}g(x)=o(1)\qquad(|n|\to\infty)$$

于是当$\Phi(x)$在$[\alpha,\beta]$上具有全连续性时

$$X(t)=\Phi(x)+g\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}2\pi\right)[\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)]$$

适合下面的条件：$X(\alpha)=\Phi(\alpha)$、$X(\beta)=\Phi(\beta)$；并在所设的完全点集的任意余补区间上取常数；又以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{-int}\mathrm{d}g(t)=0$$

得到$\int_\alpha^\beta e^{-int}\mathrm{d}X(t)=o(1)$。令$F(t)=\Phi(t)-X(t)n\int_\alpha^\beta F(t)e^{-int}\mathrm{d}t$

$$=-i\int_\alpha^\beta e^{-int}\mathrm{d}\Phi(t)+i\int_\alpha^\beta e^{-int}\mathrm{d}X(t)=o(1)$$

在此基础上把(a,b)分成有限个区间$[x_k,x_{k+1}]$，而$x_0=a$、$x_N=b(0\leqslant k\leqslant N)$，使$\Phi(t)$在每个区间上的振幅小于$\sigma$，在$[x_k,x_{k+1}]$做上述的$X(t)$，记作$X_k(t)$，

$$X_k(x_k)=\Phi(x_k)\quad X_k(x_{k+1})=\Phi(x_{k+1})$$

在$[x_k,x_{k+1}]$中一个完全点集P_k的余补区间上$X_k(t)$为常数。命

$$X(t)=\Phi(t) \qquad t\notin(a,b)$$

$$X(t)=X_k(t) \qquad t\in[x_k,x_{k+1}]$$

可见定理2.20中关于$X(t)$的性质成立，并且

$$n\int_{-\pi}^{\pi}[\Phi(t)-X(t)]e^{-int}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}n\int_{x_k}^{x_{k+1}}[\Phi(t)-X(t)]e^{-int}\mathrm{d}t=o(1)$$

2.6 正测度点集上取∞的可测函数

由2.5节知，对于有限可测函数，存在三角级数概敛于它。而对于任意的可测函数$f(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，尤其是当在正测度的点集$E\subset[0,2\pi]$上$f(x)=+\infty$(或$-\infty$)时，是否存在"概向"于它的三角级数？或者说，是否存在$\{\alpha_n,\beta_n\}$使三角多项式

$$S_n(x)=\sum_{l=0}^{n}(\alpha_l\cos lx+\beta_l\sin lx)$$

在E上几乎处处成立，

$$S_n(x)\to+\infty$$

在$[0,2\pi]\backslash E$上$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$概敛于$f(x)$，称之为概向。

设$f_1(x)$、$f_2(x)$、…均为区间$[a,b]$上的有限可测函数，除去一个零集中的点，函数质均为有限。若有可测函数$F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$对于$[a,b]$上的任意可测函数$\varphi(x)$使点集$(f_n(x)>\varphi(x))\cap(\varphi(x)>F(x))$的测度为$o(1)$；即

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)>\varphi(x)\cap(\varphi(x)>F(x))|=0$$

当$|F(x)>\varphi(x)|>0$时

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|(f_n(x)>\varphi(x))\cap F(x)>\varphi(x)|>0$$

则称$F(x)$为$\{f_n(x)\}$的度量上限。函数列$\{f_n\}$度量概向于上限$F(x)$，记作$f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$。如果存在可测函数$G(x)(a\leqslant x\leqslant b)$对于任意可测函数$\psi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$使

$$\lim_{n\to\infty}|(f_n(x)<\psi(x))\cap(\psi(x)<G(x))|=0$$

并当 $|(G(x)<\psi(x))|>0$ 时

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|(f_n(x)<\psi(x))\cap(G(x)<\psi(x))|>0$$

那么称 $G(x)$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的度量下限函数，记作 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$。

若 $f_n(x)=g_n(x)+\alpha_n(x)$ 且 $g_n(x)$ 概敛于 $f(x)$，即 $g_n(x)\dot{\to}f(x)$，又 $\alpha_n(x)\Rightarrow 0$，这是 $|\alpha_n(x)\neq 0|=o(1)$ 的简记；则称 $\{f_n(x)\}$ 度量概向于 $f(x)$，记作 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$。

可测函数列的度量上限、度量下限、度量极限之间下述关系成立；$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 均为在 $[a,b]$ 上的有限可测函数：

(1) 必有 $F(x)$ 满足 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$；

(2) 若 $f_n(x)\sup\Rightarrow F_1(x)$、$f_n(x)\sup\Rightarrow F_2(x)$，则 $F_1(x)$、$F_2(x)$ 几乎处处相等，即 $F_1(x)\doteq F_2(x)$；

(3) 若 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$、$f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$，则

$G(x)$ 几乎处处小于或等于 $F(x)$，即 $G(x)\dot{\leqslant}F(x)$；

(4) 若 $G(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 可测，则 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$ 的充要条件为 $-f_n(x)\sup\Rightarrow -G(x)$；

(5) 若 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$，则 $F(x)\dot{\leqslant}\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$；

(6) 若 $f_n(x)\inf\Rightarrow G_1(x)$、$f_n(x)\inf\Rightarrow G_2(x)$，则 $G_1(x)\doteq G_2(x)$；

(7) 若 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$、则 $G(x)\dot{\leqslant}\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$；

(8) 若 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$，则 $f_n(x)=g_n(x)+\alpha_n(x)$、$\overline{\lim_{n\to\infty}}g_n(x)=F(x)$，且 $\alpha_n(x)\Rightarrow 0$；

若 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$，则 $f_n(x)=g_n(x)+\alpha_n(x)$、$\underline{\lim_{n\to\infty}}g_n(x)=G(x)$，且 $\alpha_n(x)\Rightarrow 0$。

基于上述事实可以得到下述论断：

定理2.21 若 $F_0(x)$、$F_1(x)$ 以及 $f_1(x)$、$f_2(x)\cdots$ 均为 $[-\pi,\pi]$ 上的可测函数，对于任意 $f_m(x)$，几乎处处有

$$-F_1(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F_0(x)$$

成立，则必有系数为 $o(1)$ 的三角级数，记其部分和为 $S_n(x)(n=2,$

3，…），$S_1(x)=0$ 和连续函数列 $h_1(x)$、$h_2(x)$、…$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$满足

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F_0(x)\qquad S_n(x)\inf\Rightarrow -F_1(x)$$

当 $n_k\uparrow\infty$ 时如果 $-F_1(x)$、$F_0(x)$ 不是 $\{S_{n_k}(x)\}$ 的度量上限与度量下限，那么有 $\{h_{p_k}(x)\}$ $(p_k\uparrow\infty)$适合

$$h_{p_k}(x)-S_{n_k}(x)\Rightarrow 0\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

对于 $\{h_m(x)\}$，有 $\{S_{l_m}(x)\}$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}\{h_m(x)-S_{l_m}(x)\}\doteq 0$$

并且 $\{h_m(x)\}$、$\{f_m(x)\}$ 等度概敛；即当 $h_m(x)$、$f_m(x)$ 在 x 处为有限值时 $h_m(x)-f_m(x)\to 0$；当 $h_m(x)\to+\infty$、$f_m(x)\to+\infty$ 时称 $\{h_m(x)\}$、$\{f_m(x)\}$ 在 x 处等度收敛；对于 $h_m(x)=-\infty$、$f_m(x)=-\infty$，情况也如此。

定理 2.22 对于任意可测函数 $f(x)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，函数值 $f(x)$ 在一个正测度的点集上可以为 $+\infty$，在另一个正测度的点集上可以为 $-\infty$，同时取有限值的点集也可以为正测度；存在三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

度量概向于 $f(x)$，即其部分和的序列

$$S_n(x)=\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\qquad(m=1,2,\cdots)$$

度量概向于 $f(x)$，且

$$a_n=o(1)\qquad b_n=o(1)$$

定理 2.23 设函数 $F(x)$、$G(x)$、$\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$、…、$\psi_p(x)$ 的区间$[-\pi,\pi]$上均可测；并且几乎处处有

$$G(x)\leqslant\psi_l(x)\leqslant F(x)\qquad(l=1,2,\cdots,p)$$

成立，则必有系数为 $o(1)$ 的三角级数，其部分和 $S_n(x)$ 满足

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x)\qquad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$$

对于 ψ_l 分别有 $n_k(l)$ $(k=1,2,\cdots)$适合

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_k(l)}(x)\doteq\psi_l(x)$$

证明：将$F(x)$、$G(x)$分别作为定理2.21中的$F_0(x)$、$-F_1(x)$，这样得到系数为$o(1)$的三角级数，$F(x)$、$G(x)$分别成为它的部分和$S_n(x)$的度量上、下极限

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x) \qquad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$$

取$\{f_m(x)\}$：任意$f_m(x)$等于某个$\psi_l(x)$，但是有无穷多个$f_m(x)$满足$f_m(x)=\psi_l(x)(l=1,2,\cdots,p)$，任意$\psi_l(x)$有无穷多个$f_m(x)$等于$\psi_l(x)$，据此知$G(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F(x)$，利用定理2.21，存在连续函数列$\{h_m(x)\}$满足定理2.21中的所有条件。

尤其是$\{h_m(x)\}$有子列概敛(包括$\pm\infty$的情况)于$\psi_l(x)$。可是因为$\{S_n(x)\}$中有子列概敛于$h_m(x)$，所以$\{S_n(x)\}$有子列概敛于$\psi_l(x)$。

当$\{S_n(x)\}$的某个子列$\{S_{n_k}(x)\}$在正测度的点集E上概敛于$\psi(x)$时，应证$\psi(x)$必须为一个$\psi_l(x)$。若$S_{n_k}(x)\dot{\rightarrow}\psi(x)$在$E$上成立，则有下述情况之一：

(1) $S_{n_k}(x)\inf\Rightarrow G(x) \quad S_{n_k}(x)\sup\Rightarrow F(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(2) 存在$p_k\uparrow\infty$使$h_{p_k}(x)-S_{p_k}(x)\Rightarrow 0 \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

对于(2)，$\{p_k\}$、$\{n_k\}$分别存在子列$\{q_k\}$、$\{m_k\}$满足

$$\lim_{k\to\infty}\{h_{q_k}(x)-S_{m_k}(x)\}\doteq 0 \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

设所有$f_{q_k}(x)$均$\psi_l(x)$对应，从而

$$\lim_{l\to\infty}S_{m_k}(x)\doteq\psi_l(x) \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

故$\psi(x)\doteq\psi_l(x)$在E上成立。

对于(1)，从定理2.21的前提(5)、(7)得到

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}S_{n_k}(x)\leqslant G(x)\leqslant F(x)\leqslant\overline{\lim}_{k\to\infty}S_{n_k}(x)$$

在$[-\pi,\pi]$上几乎处处成立。综合$S_{n_k}(x)\dot{\rightarrow}\psi(x)$，推出

$$G(x)\doteq\psi(x)\doteq F(x) \qquad (x\in E)$$

有$\psi(x)\doteq\psi_l(x)$。

定理2.22为定理2.23的特例。

定理2.24 设函数$F(x)$、$G(x)$在$[-\pi,\pi]$上可测，$G(x)\dot{\leqslant}$

$F(x)$，则有系数为 $o(1)$ 的三角级数，其部分和 $S_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 满足条件：对于几乎处处适合 $G(x)\leqslant\psi(x)\leqslant F(x)$ 的可测函数，总存在 $S_{n_k}(x)$ 概敛于 $\psi(x)$，并且

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x) \qquad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$$

证明：对于 $G(x)\dot{\leqslant}F(x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的可测函数 $G(x)$、$F(x)$，今证有系数为 $o(1)$ 的三角级数，它的部分和符合

$$S_n(x)\inf\Rightarrow G(x) \qquad S_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$$

当可测函数 $\psi(x)$ 介于 $G(x)$、$F(x)$ 之间时 $S_{n_k}(x)\dot{\to}\psi(x)$。

对于 $\psi(x)$，有连续函数列 $\{g_k(x)\}$ 概敛于它

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)\doteq\psi(x) \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

把 $[-\pi,\pi]$ 分为三个点集 $E\cup E_{+\infty}\cup E_{-\infty}$，在 E 上 $\psi(x)$ 为有限函数

$$\psi(x)=+\infty \qquad (x\in E_{+\infty})$$

$$\psi(x)=-\infty \qquad (x\in E_{-\infty})$$

三个点集可能有的为空集。对正整数 m，在 E、$E_{+\infty}$、$E_{-\infty}$ 中分别取完全点集 P_m、P_m^+、P_m^- 使 $-\pi$、π 均不属于 $P_m\cup P_m^+\cup P_m^-$，在 P_m 上 $\psi(x)$ 为连续的。

$$|P_m|>|E|-\frac{1}{m^2} \qquad |P_m^{\pm}|>|E_{\pm\infty}|-\frac{1}{m^2}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上作连续函数 $g_m(x)$：

$$g_m(x)=\psi(x) \qquad (x\in P_m)$$

$$g_m(x)=\pm m \qquad (x\in P_m^{\pm})$$

在 $P_m\cup P_m^+\cup P_m^-$ 的余空间上 $g_m(x)$ 为线性的，$g_m(\pm\pi)=0$。极限点集 $E=\lim\limits_{m\to\infty}(P_m\cup P_m^+\cup P_m^-)$ 的测度为 2π。对 $x\in E$，存在 m_x，当 $m>m_x$ 时 $x\in P_m\cup P_m^+\cup P_m^-$，据此知 $\{g_k(x)\}$ 满足所述条件。

设由分点 $x_l^{(N)}=-\pi+2\pi\dfrac{l}{N}(l=0,1,2,\cdots,N)$ 把 $[-\pi,\pi]$ 分成 N 个小区间。置 $N=p_m$，在 $x_{l-1}^{(p_m)}<x\leqslant x_l^{(p_m)}$ 上定义 $\varphi_m(x)$ 等于有理数 $r_l^{(m)}(l=1,2,\cdots,p_m)$；$\varphi_m(-\pi)=r_1^{(m)}$。这样得到 $[-\pi,\pi]$ 上的有限函数列 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$、$\cdots$。再定义 $\{f_m(x)\}$：当 $G(x)\leqslant\varphi_m(x)\leqslant F(x)$

时取$f_m(x)=\varphi_m(x)$。如果$\varphi_m(x)<G(x)$,那么定义$f_m(x)=G(x)$。当$\varphi_m(x)>F(x)$时定义$f_m(x)=F(x)$。依此,

$$G(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F(x)$$

在$[-\pi,\pi]$上几乎处处成立。

在上述情况下把$G(x)$、$F(x)$分别当作$-F_1(x)$、$F_0(x)$,因此推出定理 2.21 中的$\{h_m(x)\}$、系数为$o(1)$的三角级数以及$\{n_k\}$、$\{p_k\}$、$\{l_m\}$。定理2.21 证明了定理2.24 的部分结论。

进一步证明$\psi(x)$为$\{S_n(x)\}$的某个子列的极限函数。对于$x\in[-\pi,\pi]$,几乎处处满足

$$\varphi_m(x)\leqslant f_m(x)\leqslant\psi(x)$$

或

$$\psi(x)\leqslant f_m(x)\leqslant\varphi_m(x)$$

注意到$g_k(x)$的连续性,存在正整数N_k,使x、$x'\in[-\pi,\pi]$有

$$|x-x'|<\frac{2\pi}{N_k}$$

且

$$|g_k(x)-g_k(x')|<\frac{1}{k}$$

又定义正整数序列μ_1、μ_2、…:$\mu_1=1$而$\mu_1<\mu_2<\cdots$。令

$$N'_k=\max\{N_k,p_1,p_2,\cdots p_{\mu_{k-1}}\}$$

设当$l\leqslant N'_k$时$|r_l^{(\mu_k)}-g_k(x_l^{(N'_k)})|<\dfrac{1}{k}$,于是

$$x_{l-1}^{(N'_k)}\leqslant x\leqslant x_l^{(N'_k)}\qquad(l\leqslant N'_k,k>1)$$

有$|g_k(x)-r_l^{(\mu_k)}|<\dfrac{2}{k}$,并

$$|g_k(x)-g_k(x_l^{(N'_k)})|<\frac{1}{k}$$

从而$|g_k(x)-\varphi_{\mu_k}(x)|<\dfrac{2}{k}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi,k>1)$,导致

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{\mu_k}(x)\doteq\psi(x)\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

也就是有

$$\lim_{k\to\infty} f_{\mu_k}(x) \doteq \psi(x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

因为$\{f_m(x)\}$、$\{h_m(x)\}$为等度概敛，所以

$$\lim_{k\to\infty} h_{\mu_k}(x) \doteq \psi(x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

又以$h_m(x) - S_{l_m}(x) \doteq o(1)$知

$$\lim_{k\to\infty} S_{l_k}(x) \doteq \psi(x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

定理2.24得证。

3　群上概周期函数

3.1　概周期函数定义

概周期函数是周期函数的推广，是具有某种近似周期性的有界连续函数。

设$f(x)$为定义在实数轴上的复值连续函数，当τ满足

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

时称τ为$f(x)$的属于ε的平移数；若任给$\varepsilon>0$，存在$l(\varepsilon)>0$使长度为$l(\varepsilon)$的区间内至少包括一个$f(x)$的属于ε的平移数，则称$f(x)$为概周期函数。显然，周期函数必为概周期函数。

今考虑概周期函数的自变量不是数而是群元素的情况。

定义3.1　设G为群，对$x\in G$，函数$f(x)$为复值。如果函数族$f(xa)$（a通过G）在整个群上依一致收敛而紧密，即当从每个无穷序列$f(xa_1)$、$f(xa_2)$、…中取出一个一致收敛的子序列，那么$f(x)$称为右概周期函数。

同理，在定义3.1中把$f(xa)$、$f(xa_j)$改成$f(ax)$、$f(a_jx)$，得到的$f(x)$称为左概周期函数。

定理3.1　右（左）概周期函数同时为左（右）概周期函数。

证明：在群G上的有界函数构成的集合可张成一个度量空间；为此定义距离

$$D[f(x),g(x)]=\sup_{x\in G}|f(x)-g(x)|$$

以$f(x)$为右概周期函数，则对任意$\varepsilon>0$，存在群G的一种有限ε分法

$$G=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$$

与函数$f(xa)$（a为参数）对应。在每个X_j中任取元素x_j并固定之。若任意$x\in G$，则总有x_l使

$$\sup_{a\in G}|f(xa)-f(x_ja)|<\varepsilon$$

这样$f(x_1a)$、$f(x_2a)$、…、$f(x_na)$形成函数$f(xa)$(x为参数)的一个有限的ε。利用赫斯多夫定理知上述函数为紧密的,表明$f(x)$为左概周期函数。同理可证左概周期函数也是右概周期函数。

定理3.2 若$f(x)$为概周期函数,则$f(axb)$、$\overline{f(x)}$、$\beta f(x)$、$f(x^{-1})$(a、$b\in G$,β为复数)为概周期函数。概周期函数的和、积、一致极限也是概周期函数。

定理3.3 函数族$f(cxd)$为紧密的。

证明:设X_1、X_2、…、X_n为群G与族$f(xd)$对应的一种有限ε分法。在$\mathscr{X}_j$中任取元素d_j并固定之。于是对任意$d\in G$,存在d_l使

$$|f(xd)-f(xd_l)|<\varepsilon \tag{3.1}$$

对每个固定的j,$f(xd_j)$显然为概周期函数。这样函数族$f(cxd_j)$(d为参数)是紧密的。对固定的j,考虑群G对应于$f(cxd_j)$的一种有限ε分法:

$$G=Y_{j1}\cup Y_{j2}\cup\cdots\cup Y_{jk_j}$$

当x、$y\in Y_{-j_l}(l=1,2,\cdots,k_j)$时

$$|f(cxd_j)-f(xyd_j)|<\varepsilon \quad (c\text{ 通过}G) \tag{3.2}$$

取各集Y_{jl}的理论多重交集,即首先考虑分法Y_{1u}、Y_{2v}($u=1,2,\cdots,k_1$;$v=1,2,\cdots,k_2$),以及$Y_{11}\cap Y_{2v}$、$Y_{12}\cap Y_{2v}\cdots$,从而得到群G的一种有限分法,此法最多将群G分成k_1k_2个部分;其次考虑这样部分与Y_{3p}($p=1,2,\cdots,k_3$)的交集等,结果得到群G的一种有限分法,以D_f表示所得的各个部分。如果x、$y\in D_f$,那么当u(或v,p)取某一值时,对每个$j(=1,2,\cdots,n)$,这两个元素属于同一个集。依式(3.1)、式(3.2),有

$$|f(cxd)-f(cyd)|\leqslant|f(cxd)-f(cxd_j)|$$
$$+|f(cxd_j)-f(cyd_j)|+|f(cyd_j)-f(cyd)|<3\varepsilon$$

即D_f形成群G对应于族$f(cxd)$的一种有限3ε分法。

3.2 平均值定理

定理3.4 设各有n个元素a_j、b_l。若对每个元素a_j有许多元素

b_l 对应，并且假定与任意k 个元素a_j 综合起来相对应的至少有k 个元素 b_l，则对每个元素 a_j，可从与之对应的元素 b_l 中取出一个元素 b_{lj}，使不同的 b_{lj}与不同的 $a_j(1\leqslant j\leqslant n)$对应。

证明：利用数学归纳法。对 $n=1$，显然成立。设对 1、2、…、$n-1$ 也成立。今考虑有 n 个元素的情况。

命至少有 $r+1$ 个元素 b_l 与任意 r 个元素 a_j 对应，此时取一个元素 a_j，并任选一对 b_{lj}与之对应。这样还有 $n-1$ 个元素 a_j 和 $n-1$ 个元素 b_l，而且至少有 r 个元素 b_l 与任意 r 个元素 a_j 对应，即对剩余的元素定理 3.4 的条件成立；因为剩余元素的个数是 $n-1$，所以定理 3.4 成立。

现假定与某 r 个元素 $a_j(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 相对应的恰有 r 个元素 b_l，由归纳法假定，可在这些元素之间建立所需的对应关系。

进一步证明：对其他 $n-r$ 个元素 a_j，定理 3.4 的条件也成立。实际上，设与其他任意 h 个元素 a_j 相对应的元素 b_l 少于 h 个，则与 h 个元素 a_l 以及前 r 个元素 a_j 对应的元素 b_l，其个数少于 $h+r$，这与假设矛盾。故在剩余的元素之间也能建立所需的对应关系。

定理 3.5 若集 Z 可用两种方法分成 n 个部分，即 $Z=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$、$Z=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_n$，且任意 r 部分 Y_i：Y_{i_1}、Y_{i_2}、…、Y_{i_r} 本身不可能包括 r 个以上的 X_i，则存在一种指标的排列 1、2、…、$n-j_1$、j_2、…、j_n 使 X_i 和 $Y_{ji}(i=1,2,\cdots,n)$ 含有公共元素。

事实上，取第一种分法的各个部分作为元素 a_i，第二种分法的各个部分作为元素b_j。如果$X_i\cap Y_j$ 非空，那么称元素a_i 与元素b_j 对应。今证：对少于k 个元素b_j 与任意k 个元素a_i 对应。倘若不如此，也就是只有$k'(<k)b_j$ 与 k 个 a_i 对应，这表明k'个部分Y_j 本身包括了 k 个部分 X_i，这是不可能的。

设 $f(x)$在群 G 上为概周期函数。任取 $\varepsilon>0$，且置

$$G=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$$

为与族 $f(cxd)$ 相对应的极小 ε 分法。从 X_i 中任选元素 a_i，并作平均值

$$M\{f;a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)$$

$M\{f;a_1,a_2,\cdots,a_n\}$由元素$a_1$、$a_2$、…、$a_n$的取法确定，其误差不超过$\varepsilon$。

令$G=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_n$为群$G$与函数族$f(cxd)$相对应的另一个极少$\varepsilon$分法。考虑平均值

$$M\{f;b_1,b_2,\cdots,b_n\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(b_j)\quad(b_j\in Y_i)$$

而X_i、Y_i满足定理3.4的条件。事实上，如果有r个X_i覆盖了$r+s$ $(s>0)$个Y_j，那么n就不是极小的。根据定理3.4，在X_i、Y_i中可任选出公共元素c_1、c_2、…、c_n，故

$$\begin{aligned}&|M\{f;a_1,a_2,\cdots,a_n\}-M\{f;b_1,b_2,\cdots,b_n\}|\leqslant\\&|M\{f;a_1,a_2,\cdots,a_n\}-M\{f;c_1,c_2,\cdots,c_n\}|+\\&|M\{f;c_1,c_2,\cdots,c_n\}-M\{f;b_1,b_2,\cdots,b_n\}|<2\varepsilon\end{aligned}\quad(3.3)$$

平均值定理 对应于每个概周期函数$f(x)$，存在平均值$M\{f(x)\}$，其值可由形如

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(ca_id)$$

的式子对c、d一致逼近于它，且该值唯一确定。

证明：设$f(x)$为概周期函数，a_i为对于族$f(cxd)$的极小ε分法的代表；取c_0、$d_0\in G$为固定元素，显见$c_0X_1d_0$、$c_0X_2d_0$、…、$c_0X_nd_0$构成G对同一族$f(cxd)$的极小ε分法，而$c_0a_id_0$为此分法的代表。实际上，如果x'、$x''\in c_0X_id_0$，那么存在y'、$y''\in X_i$使$x'=c_0y'd_0$、$x''=c_0y''d_0$。也就是对c、$d\in G$，

$$|f(cx'd)-f(cx''d)|=|f(cc_0y'd_0d)-f(cc_0y''d_0d)|<\varepsilon$$

应用式(3.3)，

$$\left|M\{f;a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(c_0a_id_0)\right|<2\varepsilon\quad(3.4)$$

假定对于给定的$\varepsilon'>0$，可以找到元素b_1、b_2、…、$b_m\in G$以及具有下列性质的$A'=A'(\varepsilon',b_1,b_2,\cdots,b_m)$，对于所有$c$、$d\in G$，

$$\left|A' - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(cb_j d)\right| < \varepsilon' \tag{3.5}$$

式(3.5)表明对应于$\varepsilon' > 0$,总有A'及形如$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(cb_j d)$的式子使式(3.5)成立。

在式(3.5)中令$d=e$(群G的单位元素),并且依次命c等于a_1、a_2、…、a_n;结合得到的所有等式的算术平均,有

$$\left|A' - \frac{1}{nm}\sum_{i,j} f(a_i b_j)\right| < 2\varepsilon' \tag{3.6}$$

同理,若式(3.4)中$c_0=e$,并且依次命d_0等于b_1、b_2、…、b_n,再以$\frac{1}{m}$乘每个不等式且相加,则有

$$\left|M\{f; a_1, a_2, \cdots, a_n\} - \frac{1}{nm}\sum_{i,j} f(a_i b_j)\right| < 2\varepsilon \tag{3.7}$$

依式(3.6)、式(3.7)推出

$$|A' - M\{f; a_1, a_2, \cdots, a_n\}| < 2(\varepsilon + \varepsilon') \tag{3.8}$$

当A''与ε''对应时,

$$|A'' - M\{f; a_1, a_2, \cdots, a_m\}| < 2(\varepsilon + \varepsilon'')$$

因此

$$|A' - A''| < 4\varepsilon + 2(\varepsilon' + \varepsilon'')$$

对于$\varepsilon \to 0$,得

$$|A' - A''| \leqslant 2(\varepsilon' + \varepsilon'') \tag{3.9}$$

注意到ε'、ε''的任意性,所以由式(3.9)知所有满足以上所提出的条件的一切A收敛于同一个极限,称这个极限为函数$f(x)$的平均值,记作$M\{f(x)\}$。当$\varepsilon' \to 0$时从式(3.8)可有

$$|M_x\{f(x)\} - M\{f; a_1, a_2, \cdots, a_n\}| < 2\varepsilon \tag{3.10}$$

而ε是任意的,于是$f(x)$的平均值是唯一的。

概周期函数的平均值具有如下性质:

(1) $M_x\{\beta f(x)\} = \beta M_x\{f(x)\}$;　　($\beta$为复数)

(2) $M_x\{f(x) \pm g(x)\} = M_x\{f(x)\} \pm M_x\{g(x)\}$;

(3) $M_x\{1\} = 1$;

(4) 若在群 G 上 $f(x)\geqslant 0$，则 $M_x\{f(x)\}\geqslant 0$；若除此之外 $f(x)\neq 0$，则$M_x\{f(x)\}>0$；

(5) $|M_x\{f(x)\}|\leqslant M_x\{|f(x)|\}$；

(6) $M_x\{\overline{f(x)}\}=\overline{M}_x\{f(x)\}$；

(7) $M_x\{f(xa)\}=M_x\{f(ax)\}=M_x\{f(x)\}$； $(a\in G)$

(8) $M_x\{f(x^{-1})\}=M_x\{f(x)\}$。

事实上，(1)、(3)和(4)的前半部分以及(5)、(6)、(7)可从 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(ca_id)$ 的极限这个定义获得。今证(8)。设$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(ca_id)$ 收敛于$M_x\{f(x)\}$，将c、d 换成c^{-1}、d^{-1}，这样得到形如$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c^{-1}a_id^{-1})$ $=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f[(da_i^{-1}c)^{-1}]$ 的式子，据此定义 $f(x^{-1})$ 的平均值。

先证(2)。考虑对应于函数族$f(cxd)$、$g(cxd)$的一种共有的ε分法，从中选出极小的分法，并作出 $M_x\{f(x)\}$、$M_x\{g(x)\}$、$M_x\{f(x)\pm g(x)\}$，且有

$$M_x\{f(x)\pm g(x)\}=M_x\{f(x)\}\pm M_x\{g(x)\}$$

因为平均值的唯一性，所以(2)成立。再证(4)的后半部分。设$f(x)\geqslant 0$，并有元素$x_0\in G$ 使$f(x_0)>\beta>0$。令$\varepsilon=\frac{1}{2}\beta$，又设$f(xa_1)$、$f(xa_2)$、…、$f(xa_n)$为族$f(xa)$的一个有限的$\varepsilon$，也就是对应于每个$a\in G$，总有一个元素 a_i 使

$$|f(xa)-f(xa_i)|<\frac{1}{2}\beta$$

当$x=x_0a_i^{-1}$ 时，

$$|f(x_0a_i^{-1}a)-f(x_0)|<\frac{1}{2}\beta$$

从而$f(x_0a_i^{-1}a)>\frac{1}{2}\beta$，于是对任意$a\in G$，

$$g(a)=f(x_0a_1^{-1}a)+f(x_0a_2^{-1}a)+\cdots+f(x_0a_n^{-1}a)>\frac{1}{2}\beta$$

对a 求平均，再依(1)、(2)、(7)及(4)的前半部分，

$$M_x\{f(x)\}>\frac{\beta}{2n}>0$$

定理 3.6 概周期函数的平均值(1)、(2)、(3)和(4)的前半部分以及(7)可唯一地确定平均值。

证明：设有适合定理中所列条件的函数$M'_x\{f(x)\}$；根据(1)、(2)，不失一般性，取$f(x)$为实概周期函数。任给$\varepsilon>0$，又设$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(ca_id)$符合

$$M_x\{f(x)\}-\varepsilon\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(ca_i)\leqslant M_x\{f(x)\}+\varepsilon$$

式中d为群的单位元素。把c当作自变量，对c取平均值M'，由(7)知

$$M_x\{f(x)\}-\varepsilon\leqslant M'_x\{f(x)\}\leqslant M_x\{f(x)\}+\varepsilon$$

注意到ε的任意性，$M'\{f(x)\}=M\{f(x)\}$。

3.3 群的酉表示

定义 3.2 设矩阵$g(x)=\{g_{ij}(x)\}$，其元素$x\in G$(群)的函数。如果

(1) $g(e)=I_r$，而e为G的单位元素，I_r为r阶单位矩阵；

(2) $g(xy)=g(x)g(y)$，而x、$y\in G$；

那么称$g(x)$为群G的线性表示，称r为表示的阶。

定义 3.3 设$g(x)$、$g'(x)$为群G的两种表示，其阶均为r。若存在一个r阶的常数矩阵A，使

$$g'(x)=A^{-1}g(x)A$$

则称$g(x)$、$g'(x)$等价表示；当$g(x)$为酉矩阵时称线性表示为酉表示。

可以证明：酉表示的元素$g_{ij}(x)$为概周期函数。事实上，依酉矩阵的性质，

$$\sum_{j=1}^{r}|g_{ij}(x)|^2=1\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

于是对所有i、j，$|g_{ij}(x)|\leqslant1$。另外，

$$g_{ij}(ax) = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(a) g_{kj}(x)$$

又对任意 a，$|g_{ik}(a)| \leqslant 1$，故族 $g_{ij}(ax)$ 为紧密的。定理 3.6 若表示 $g(x) = \{g_{ij}(x)\}$ 的元素 g_{ij} 为一致有界，则存在和 $g(x)$ 等价的酉表示。取

$$A_{ij} = M_x\left\{ \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(x)\, \overline{g_{jk}(x)} \right\}$$

为常数矩阵 A 的元素。显见 $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$，即矩阵 $A = \{A_{ij}\}$ 为埃尔米特的。其次对于满足 $\sum_{i=1}^{r} |\eta_i|^2 > 0$ 的任意复数 η_1、η_2、…、η_r，有

$$\sum_{i,j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{r} g_{ik}(x)\, \overline{g_{jk}(x)} \right] \eta_i \bar{\eta}_j = \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{r} g_{ik}(x) \eta_i \right|^2 \geqslant 0$$

求 x 的平均值

$$\sum_{i,j=1}^{r} A_{ij} \eta_i \bar{\eta}_j > 0$$

表明 A 为正定埃尔米特矩阵。于是存在常数酉矩阵 U，使

$$U^{-1}AU = \{\lambda_i \delta_{ik}\}$$

式中 $\lambda_i > 0$，δ_{ik} 为克罗内克张量。对矩阵

$$\Gamma = \{\sqrt{\lambda_i}\, \delta_{ik}\}$$

易知

$$U^{-1}AU = \Gamma^2$$

而

$$A = U\Gamma^2 U^{-1} = (U\Gamma U^{-1})(U\Gamma U^{-1}) = BB$$

B 为埃尔米特矩阵。由平均值的不变性，

$$\begin{aligned} A_{ij} &= M_x\left\{ \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(ax)\, \overline{g_{jk}(ax)} \right\} \\ &= M_x\left\{ \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{i_0=1}^{r} g_{ii_0}(a) g_{i_0 k}(x) \right] \left[\sum_{j_0=1}^{r} \overline{g_{jj_0}(a)}\, \overline{g_{j_0 k}(x)} \right] \right\} \\ &= \sum_{i_0, j_0} g_{ii_0}(a)\, \overline{g_{jj_0}(a)} A_{i_0 j_0} \end{aligned}$$

也就是$A=g(a)Ag^*(a)$，而共轭矩阵$g^*(a)=\{\overline{g_{ji}(a)}\}$，或

$$BB=g(a)BBg^*(a)$$

$$B^{-1}g(a)BBg^*(a)B^{-1}=I_r$$

推出

$$[B^{-1}g(a)B][B^{-1}g(a)B]^*=I_r$$

即与$g(a)$等价表示$B^{-1}g(a)B$为酉表示。

定义3.4 设X为r维向量空间Y中的线性变换组成的集合。如果空间Y有一个s维($0<s<r$)子空间S对于X中的所有变换不变，那么称X为可约集；否则称X为不可约集。

在Y中选取确定的坐标，于是X中的每个变换对应一个矩阵。以Y表达所有这些组成的集，由X的可约性或不可约性，称矩阵集Y为可约的或不可约的。令X为可约的，在空间Y中选取坐标，使前s个坐标轴在S内，故每个矩阵$d\in Y$的形式为

$$d=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

式中a为s阶方阵、c为$r-s$阶方阵。

取d的共轭矩阵d^*，与d对应的变换f^*使空间Y的$r-s(>0)$维子空间S'不变。现证：若矩阵集Y为可约的，则共轭矩阵集Y^*也是可约的。矩阵$x\in Y$可能无式(3.11)的形式；当应用特殊方法选取坐标轴时就可得到形如式(3.11)的矩阵。这表明存在常数矩阵T，使$TxT^{-1}=x'$均有式(3.11)的形式。考虑共轭矩阵，就有$(T^{-1})^*x^*T^*=x'^*$、$x^*=T^*x'^*(T^{-1})^*$。因为矩阵x'^*使某个子空间S'不变，所以矩阵x^*也使某个子空间S''不变，表明Y为可约的。

用f为空间Y中的酉变换，它对应的矩阵为d。命f使某S维子空间S不变。以S'表示和空间S中向量正交的一切向量张成的$r-s$维子空间。注意到f为酉变换，从而正交向量在变换后变成正交向量，也就是子空间S'也对于f不变。在Y中取一个正交集，使前r个坐标轴在S内，其他的在S'内。在新基中形如

$$d'=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

的矩阵 d' 与变换 f 对应，而 a 为 s 阶方阵、b 为 $r-s$ 阶方阵，且 $d'=TdT^{-1}$，这里 T 为酉矩阵。

置 $g(x)=\{g_{ij}(x)\}$ 为群 G 的可约酉表示，由前述知存在常数酉矩阵 T，使 $h(x)=T^{-1}g(x)T$ 有如下形式

$$h(x)=\begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & g''(x) \end{pmatrix}$$

其中 $g'(x)$、$g''(x)$ 为酉矩阵，显然 $g'(x)$、$g''(x)$ 也是 G 的表示，这样表示 $g(x)$ 可分解 $g'(x)$、$g''(x)$。若 $g'(x)$、$g''(x)$ 可约，则还可将其分解，于是群 G 的每个有限酉表示可以分解为有限个不可约的酉表示。

舒尔定理 设 $\{A\}$、$\{B\}$ 分别为 m 阶、n 阶矩阵集，P 为 $m\times n$ 矩阵，令

$$\{A\}P=P\{B\} \tag{3.12}$$

即对每个矩阵 $a\in\{A\}$，总有一个矩阵 $b\in\{B\}$ 对应，使 $aP=Pb$；反之，对每个矩阵 $b\in\{B\}$，总有一个矩阵 $a\in\{A\}$，使 $aP=Pb$。在这些条件下有两种可能：或 P 的所有元素均为零，或 $m=n$ 且 $\det P\neq 0$。

证明：设 $P=\{p_{ij}\}$，$\boldsymbol{p}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 表示以 p_{1k}、p_{2k}、$\cdots$、p_{mk} 为坐标的向量，以 S 表示由向量 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n$ 所张成的 m 维向量空间的线性子空间。今证 S 对于集 $\{A\}$ 中的所有变换不变。取 $a=\{a_{ij}\}\in\{A\}$，而 b 为 $\{B\}$ 中适合

$$aP=Pb \tag{3.13}$$

的矩阵。命 $\boldsymbol{q}_k=a\boldsymbol{p}_k$，

$$q_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_{jk}$$

式中 $i=1,2,\cdots,m$；$k=1,2,\cdots,n$。由式(3.13)，

$$q_{ik}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}b_{jk}$$

于是向量 $\boldsymbol{q}_k$ 的坐标可用 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_k$ 的坐标线性表示，从而 $\boldsymbol{q}_k\in S$。因为 $\{A\}$ 不可约，所以 S 的维数或为零或为 m。在第一种情况下 $\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}$，这样矩阵 P 的元素为零；在第二种情况下 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{p}_n$ 中恰有 m

个线性无关，P 中有 m 列线性无关。据此，

$$n \geqslant m \tag{3.14}$$

由$\{A\}$、$\{B\}$中的转置矩阵构成的矩阵集记作$\{A\}^t$、$\{B\}^t$，$\{A\}^t$、$\{B\}^t$ 为不可约的。又 P^t 表示 P 的转置矩阵，依式(3.12)知

$$\{B\}^t P^t = P^t \{A\}^t$$

同理可证：或P^t 的所有元素为零，或P^t 中有n 列线性无关。从第一个假设将无新结果；从第二个假设导出 P 中有 n 行线性无关，即 $n \leqslant m$。结合式(3.14)得 $n=m$，且 $\det P \neq 0$。

设$\{A\}$为r 阶方阵组成的不可约集。b 为r 阶方阵，且其对$\{A\}$中的所有方阵都是置换的。依据这些条件$b=\beta I_r$，而β 为复数，I_r 为 r 阶单位矩阵。

实际上，取矩阵 $a=b-\beta I_r$，β 为方程

$$\det(b-\beta I_r)=0$$

的根。显然 a 对$\{A\}$中的所有矩阵也是置换的，从假设有 $\det a=0$，根据舒尔定理知矩阵 a 的一切元素为零。

如果$\{A\}$为两两置换的矩阵构成的不可约集，那么$\{A\}$中的所有矩阵都是一阶的。

定理 3.7 若 $g(x)$、$h(x)$为群 G 的两种不可约的、不等价的 m 阶、n 阶酉表示，则

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{h_{kl}(x)}\}=0$$

式中 i、$j=1,2,\cdots,m$；k、$l=1,2,\cdots,n$。

证明：以 b 表示 $m \times n$ 常数矩阵。置

$$a(x)=g(x)bh(x^{-1}) \qquad a=M_x\{a(x)\}$$

从平均值的不变性，

$$\begin{aligned} g(y)ah(y^{-1}) &= M_x\{g(y)g(x)bh(x^{-1})h(y^{-1})\} \\ &= M_x\{g(yx)bh[(yx)^{-1}]\}=M_x\{a(yx)\}=a \end{aligned}$$

因此 $g(y)a=ah(y)$；由舒尔定理知存在两种情况：

(1) $m=n$ 且 $\det a \neq 0$，此时 $h(y)=a^{-1}g(y)a$，表示 $g(x)$ 和表示 $h(x)$ 为等价的，这与假定矛盾。

(2) 矩阵 a 由零组成，对任意常数矩阵 b，

$$M_x\{g(x)bh(x^{-1})\}=0$$

对b:在第j行、第l列处的元素为1,其余为0,推出

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{h_{kl}(x)}\}=0$$

而$i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n$。

定理3.8 若$g(x)$为群G的r阶不可约表示,则

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{g_{ij}(x)}\}=\frac{1}{r}$$

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{g_{kl}(x)}\}=0 \quad (\text{当} i\neq k \text{ 或 } j=l \text{ 时})$$

证明:用$b=\{b_{ij}\}$表示r阶常数方阵,记

$$a(x)=g(x)bg(x^{-1}) \qquad a=M_x\{a(x)\}$$

注意到平均值的不变性,

$$g(y)ag(y^{-1})=a$$

或

$$g(y)a=ag(y)$$

应用舒尔定理,$a=\beta I_r$,有

$$M_x\{g(x)bg(x^{-1})\}=\beta I_r$$

为了计算β,考虑上式两边的迹有$M_x\{[g(x)bg(x^{-1})]\}=\beta r$,故$\beta=\frac{1}{r}\mathrm{sp}(b)$。命$b$中在第$j$行、第$l$列处的元素为1,其他为0,于是$\mathrm{sp}(b)=\delta_{jl}$,从而

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{g_{kl}(x)}\}=\frac{1}{r}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

今将群G的一切不可约酉表示组成的集合分类,使等价的表示为一类;从每一类中任选一个表示组成集合S。设$g(x)=\{g_{ij}(x)\}\in S$,$f(x)$为G上的概周期函数。矩阵

$$A=\{a_{ij}\}=rM_x\{f(x)g^t(x^{-1})\}=r\{M_x[f(x)\overline{g_{ij}(x)}]\}$$

称A为$f(x)$的傅里叶矩阵;这里$g^t(x)$为矩阵$g(x)$的转置矩阵。

利用定理3.7、定理3.8知,在S中不同矩阵内以及同一个矩阵内的函数$g_{ij}(x)$相互正交。这样对应于每个概周期函数$f(x)$,最多有可数个r_1、r_2、…阶矩阵$g_n(x)=\{g_{ij}^{(n)}(x)\}\in S$,对于它们,

$f(x)$的傅里叶矩阵为非零矩阵。取$f(x)$的傅里叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{r_n} |a_{ij}^{(n)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}[A_n g_n^t(x)] \quad (3.15)$$

使用贝塞尔不等式，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \sum_{i,j=1}^{r_n} |a_{ij}^{(n)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}(A_n A_n^*) \leqslant M_x\{|f(x)|\}$$

(3.16)

其中A_n的共轭矩阵$A_n^* = \{\bar{a}_{ji}^{(n)}\}$。

唯一性定理 若$f(x)$为概周期函数，且对$g(x) \in S$傅里叶矩阵为零矩阵，则$f(x)$恒为零。

当式(3.16)中取等号时，称之为巴舍法等式。巴舍法等式等价于唯一性定理。

3.4 近似定理

设$g_1(x)$、$g_2(x)$、…、$g_N(x)$为群G的r_1、r_2、…、r_N阶酉表示，B_1、B_2、…、B_N为任意r_1、r_2、…、r_N阶常数矩阵，而有限和

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sp}\{B_n g_n^t(x)\}$$

$P_N(x)$为在G上的概周期函数。如果有限和序列在G上一致收敛，那么极限函数也是概周期函数。

近似定理 设$f(x)$为在群G上概周期函数，任给$\varepsilon>0$，存在有限多项式

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sp}\{B_k^{(\varepsilon)} g_k^t(x)\}$$

适合

$$\sup_{x \in G} |f(x) - P_N(x)| < \varepsilon$$

式中$g_k(x)$为G的r_k阶不可约酉表示，$B_k^{(\varepsilon)}$为r_k阶常数矩阵。

证明：取

$$g(x) = \sup_{\tau \in G} |f(x\tau) - f(\tau)|$$

进一步证明 $g(x)$ 为概周期函数。设群 $G=x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_n$ 为对应于函数族 $f(xa)$（a 为参数）的一种有限 ε 分法。因为对 $a\in G$，

$$g(xa)=\sup_{\tau\in G}|f(xa\tau)-f(\tau)|=\sup_{\tau\in G}|f(x\tau)-f(a^{-1}\tau)|$$

所以对 x'、$x''\in x_i(i=1,2,\cdots,n)$，

$$|g(x''a)-g(x'a)|=\sup_{\tau\in G}|f(x''\tau)-f(a^{-1}\tau)|$$
$$-\sup_{\tau\in G}|f(x'\tau)-f(a^{-1}\tau)|\leqslant\sup_{\tau\in G}|f(x''\tau)-f(x'\tau)|<\varepsilon$$

据此，$g(x)$ 具有概周期性。关于函数 $\varphi_\varepsilon(v)(v\geqslant0)$，

$$\varphi_\varepsilon(v)=\begin{cases}1-\dfrac{v}{\varepsilon} & (0\leqslant v\leqslant\varepsilon)\\ 0 & (v>0)\end{cases}$$

记

$$\psi_\varepsilon(x)=\frac{\varphi_\varepsilon[g(x)]}{M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}}$$

由于 $\varphi_\varepsilon[g(e)]=\varphi_\varepsilon(0)=1$，因此 $\varphi_\varepsilon[g(x)]$ 为不恒等于零的正概周期函数。但 $M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}\neq0$，$\psi_\varepsilon(x)$ 存在并为在 G 上的概周期函数。现考虑函数

$$f_\varepsilon(x)=M_u\{f(u)\psi_\varepsilon(xu^{-1})\}$$

以证明：当 $\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\neq0$ 时

$$|f(x)-f(\tau)|<\varepsilon \tag{3.17}$$

事实上，如果 $\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\neq0$，那么 $\varphi_\varepsilon[g(x\tau^{-1})]\neq0$，即 $g(x\tau^{-1})<\varepsilon$ 及

$$\sup_u|f(x\tau^{-1}u)-f(u)|<\varepsilon$$

把 $\tau^{-1}u$ 变成 u，

$$\sup_u|f(xu)-f(\tau u)|<\varepsilon$$

通过 $u=e$ 就得到式(3.17)。因为 $M_\tau\{\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\}=1$，所以 $f(x)=M_\tau\{f(x)\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\}$，表明

$$f(x)-f_\varepsilon(x)=M_\tau\{[f(x)-f(\tau)]\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\}$$

利用式(3.17)可推出估计式

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)|\leqslant M_\tau\{|f(x)-f(\tau)|\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\}<\varepsilon \tag{3.18}$$

依巴舍法等式

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}\{A_n g_n^t(x)\}$$

取 $\eta > 0$ 及正整数 $N = N(\eta)$，使下式成立

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}\{A_n A_n^*\} < \eta \tag{3.19}$$

置

$$S_N(x) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}\{A_n g_n^t(x)\} \qquad r_N(x) = f(x) - S_N(x)$$

由巴舍法等式，

$$M_x\{|r_N(x)|^2\} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}(A_n A_n^*) < \eta$$

但

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= M_\tau\{f(\tau)\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\} = M_\tau\{S_N(\tau)\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\} + \\ &\quad M_\tau\{r_N(\tau)\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{r_n} \mathrm{sp}[A_n M_\tau\{g_n^t(\tau^{-1})\psi_\varepsilon(\tau)\} g_n^t(x)] + \\ &\quad M_\tau\{r_N(\tau)\psi_\varepsilon(x\tau^{-1})\} = P_\varepsilon(x) + R_N^\varepsilon(x) \end{aligned}$$

这里 $P_\varepsilon(x)$ 为有限多项式；今估计余项 $R_N^\varepsilon(x)$。利用柯西不等式和式(3.19)，得

$$\begin{aligned} |R_N^\varepsilon(x)|^2 &\leqslant M_\tau\{|r_N(\tau)|^2\} M_\tau\{\psi_\varepsilon^2(x\tau^{-1})\} \\ &< \eta M_\tau\{\psi_\varepsilon^2(\tau)\} < \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

只需

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{M_\tau\{\psi_\varepsilon^2(\tau)\}}$$

综合式(3.20)、式(3.18)，推出

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < 2\varepsilon$$

注意到 ε 的任意性，故近似定理得证。

3.5 紧密群

定义3.5 设群 G 为拓扑空间，若在 G 上的乘法运算对于所考虑的拓扑结构是连续的，则称 G 为拓扑群。

定义3.6 设函数$f(x)$在拓扑群G上给出。若任给$\varepsilon>0$，总有单位元素$e\in G$的邻域$W(\varepsilon)$使G中满足$ab^{-1}\in W$的元素a、b适合

$$\sup_x |f(xa)-f(xb)|<\varepsilon$$

则称$f(x)$为在G上的一致连续函数。

可以证明：当概周期函数$f(x)$在群G上连续时它也一致连续。否则就有

(1) 一个固定的正数β；

(2) G中的单位元素e的邻域组成无穷序列W_1、W_2、…并收缩于e；

(3) G中元素对构成无穷序列$(a_1,a'_1)\in W_1$、$(a_2,a'_2)\in W_2$、…，使对所有n，

$$\sup_x |f(xa'_n)-f(xa_n)|>\beta$$

或

$$\sup_x |f(xa_n^{-1}a'_n)-f(x)|>\beta \tag{3.21}$$

因为根据假定，$f(x)$为概周期函数，所以从序列

$$f(xa_n^{-1}a'_n) \quad (n=1,2,\cdots) \tag{3.22}$$

中可选出一个一致收敛的子序列。不失一般性，取式(3.22)本身收敛。当$n\to\infty$时$a_n^{-1}a'_n\to e$，于是下列极限在整个群上一致成立

$$f(xa_n^{-1}a'_n)\to f(x) \tag{3.23}$$

表明式(3.23)与式(3.21)矛盾。

如果G为拓扑群，概周期函数$f(x)$在G的拓扑结构上连续，那么$f(x)$的傅里叶级数中所包括的不可约表示的元素在G的拓扑结构上也连续。

记$g(x)=M_y\{f(xy)\overline{f(y)}\}$，今证$g(x)$在群$G$的拓扑结构上连续。实际上，因为$f(x)$为连续的、概周期的，所以它是一致连续的。或者说，任给$\varepsilon>0$，存在G的单位元素的邻域$W=W(\varepsilon)$，使对x'、$x''\in W$，有

$$\sup_{y\in G} |f(x'y)-f(x''y)|<\varepsilon$$

或

$$|g(x')-g(x'')|<\varepsilon\sup_y|f(y)|$$

表明$g(x)$为在G上的连续函数。

对于$g(x)$的傅里叶级数,当

$$f(x)\sim\sum_n\frac{1}{r_n}\mathrm{sp}\{A_n g_n^t(x)\}$$

时,

$$g(x)\sim\sum_n\frac{1}{r_n}\mathrm{sp}\{B_n g_n^t(x)\}\tag{3.24}$$

式中$B_n=A_nA_n^*$、$g_n^t(x)=\{g_{ji}^{(n)}(x)\}$。置

$$\varphi_i(x)=\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}^{(n)}(x)\quad(i=1,2,\cdots,r_n)$$

任取函数$\varphi_i(x)$为积分方程

$$\lambda_0\varphi_i(x)=M_y\{g(xy^{-1})\varphi_i(y)\}\tag{3.25}$$

的特征函数,而$\lambda_0\neq0$,$i=1,2,\cdots,r_n$。为了确定α_j、λ_0,在式(3.25)中代入$\varphi_i(x)$,得

$$\begin{aligned}M_y\{g(xy^{-1})\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}^{(n)}(y)\}&=M_y\{g(y)\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}(y^{-1}x)\}\\&=M_y\{g(y)\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j\sum_{k=1}^{r_n}g_{jk}^{(n)}(y^{-1})g_{ki}^{(n)}(x)\}\\&=\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j\sum_{k=1}^{r_n}g_{ki}^{(n)}(x)M_y\{g(y)\,\overline{g_{kj}^{(n)}(y)}\}\\&=\sum_{k=1}^{r_n}\alpha_k\sum_{j=1}^{r_n}b_{jk}^{(n)}g_{ji}^{(n)}(x)=\lambda_0\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}^{(n)}(x)\end{aligned}$$

这里$b_{jk}^{(n)}$为矩阵B_n的元素。作为不可约表示的元素,函数$g_{ji}^{(n)}(x)$是正交的,从而线性无关。从$g_{ij}^{(n)}(x)$的系数出发可有线性方程组

$$\sum_{k=1}^{r_n}b_{jk}^{(n)}\alpha_k=\lambda_0\alpha_j\tag{3.26}$$

因为B_n为非零埃尔米特矩阵,所以在B_n的特征值中可以找到不等于零的数。式(3.26)表明λ_0为B_n的特征值。命$\lambda_0\neq0$、$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

α_{r_n})为式(3.26)的非零解。

函数 $\varphi_i(x)=\sum\limits_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}^{(n)}(x)(i=1,2,\cdots,r_n)$为式(3.25)的非零解。注意到 $g(x)$的连续性和概周期性,$g(x)$为一致连续,结果 $\varphi_i(x)$是连续概周期函数。依 $g_{ij}^{(n)}(x)$的正交性,有

$$M_x\{\varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \dfrac{1}{r_n}\sum\limits_{j=1}^{r_n}|\alpha_j|^2 & (i=j)\end{cases}\tag{3.27}$$

另外,

$$\varphi_i(xy)=\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j g_{ji}^{(n)}(xy)=\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_j\sum_{k=1}^{r_n}g_{jk}^{(n)}(x)g_{ki}^{(n)}(y)$$
$$=\sum_{k=1}^{r_n}g_{ki}^{(n)}(y)\varphi_k(x)$$

用 $\varphi_j(x)$乘上式,并对 x 取平均值,由式(3.27)得

$$M_x\{\varphi_i(xy)\overline{\varphi_j(x)}\}=\left(\frac{1}{r_n}\sum_{j=1}^{r_n}|\alpha_j|^2\right)g_{ji}^{(n)}(y)$$

利用上式且结合 $\varphi_i(x)$的连续性和概周期性可知 $g_{ij}^{(n)}(x)$连续(i、$j=1,2,\cdots,r_n$)。

如果 G 为阿贝尔群,那么由舒尔定理知不可约酉表示为一维的。此时傅里叶级数可表达成

$$f(x)\sim\sum_n a_n X_n(x)\qquad a_n=M_x\{f(x)\overline{X_n(x)}\}$$

其中群 G 的特征 $X_n(x)$符合:

(1) $X_n(e)=1$;

(2) $|X_n(x)|=1$;

(3) $X_n(xy)=X_n(x)X_n(y)$。

而巴舍法等式变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=M_x\{|f(x)|^2\}$。若 G 为交换拓扑群,又概周期函数 $f(x)$在此拓扑结构上连续,则特征 $X_n(x)$是连续函数。

定义3.7 给定群G中的一个元素序列a_1、a_2、…。若存在G的单位元素e的邻域序列U_1、U_2、…使

(1) $a_n \in U_n$;

(2) 所有U_n的交集等于e;

则称序列a_1、a_2、…收敛于e。

定义3.8 如果元素序列$a_n^{-1}a$收敛于群G的单位元素$e(a\in G)$,那么称元素序列a_1、a_2、…收敛于a。

定义3.9 若在拓扑群G元素组成的每个无穷序列中可以选出一个一致收敛的子序列,则称G为紧密群。

定理3.9 在紧密群上的每个连续函数为在该群上的概周期函数。

证明:设G为紧密群,$f(x)$为在G上的连续函数,而a_1、a_2、…是由群中元素构成的一个序列。现证:从函数序列$f(a_1x)$、$f(a_2x)$、…中可取出一个一致收敛的子序列。因为G为紧密群,所以从a_1、a_2、…中可选出一个一致收敛的子序列。不失一般性,设序列a_n本身收敛并以a表示a_n的极限元素,于是下列极限在G上一致成立

$$\lim_{n\to\infty} f(a_nx)=f(ax)$$

假如不是这样,可以指出:

(1) 一个固定的数$\beta>0$;

(2) 一个无穷递增的正整数序列n_1、n_2、…;

(3) 由群G中元素构成的一个无穷序列x_1、x_2、…使对$k(=1,2,\cdots)$下式成立

$$|f(a_{n_k}x_k)-f(ax_k)|>\beta \tag{3.28}$$

由于G为紧密群,因此从无穷序列x_k中可选出一个一致收敛的子序列。

不失一般性,设序列x_k本身收敛。以x_0表示x_k的极限元素。注意到$f(x)$的连续性,对式(3.28)取极限,这样

$$\lim_{k\to\infty}|f(a_{n_k}x_k)-f(ax_k)|=|f(\lim_{k\to\infty}a_{n_k}x_k)-f(a\lim_{k\to\infty}x_k)|>\beta>0$$

不过这是不可能的，定理得证。

紧密群的线性表示理论与希尔伯特第五问题有关。希尔伯特第五问题：设拓扑群G的单位元素e存在与欧几里德空间的r维球同胚的邻域，判断在此条件下G是否为李群。

4 准解析函数的微积分

4.1 准解析函数定义

准解析函数是解析函数的推广，属于广义解析函数。

4.1.1 生成元

对于线性偏微分方程

$$A_{11}(x,y)\varphi_{xx}+A_{12}(x,y)\varphi_{xy}+A_{22}(x,y)\varphi_{yy}+$$
$$A_1(x,y)\varphi_x+A_2(x,y)\varphi_y+A(x,y)\varphi=0 \quad (4.1)$$

经过变换，式(4.1)可变成

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+B_1(x,y)\varphi_x+B_2(x,y)\varphi_y+B(x,y)=0 \quad (4.2)$$

称式(4.1)为椭圆型偏微分方程；如拉普拉斯方程，

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \quad (4.3)$$

式(4.3)的解是解析函数$f(z)$的实部。

设$z=x+iy$、$\zeta=\xi+i\eta$、$z=X+iY$、$w=u+iv$、…，偏导以下标表示。定义形式偏导$\frac{\partial}{\partial z}$、$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$的关系

$$2w_z=w_x-iw_y \qquad 2\overline{w}_{\bar{z}}=w_x+iw_y \quad (4.4)$$

偏导w_z、$w_{\bar{z}}$存在必须且只须w_x、w_y存在。注意

$$w_z=\frac{1}{2}[(u_x+v_y)-i(u_y-v_x)] \quad (4.5)$$

$$w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)] \quad (4.6)$$

这些算子关于和、积等运算如同普通导数。

用D表示的区域为连通开集(在平面内)，D的闭包由$\overline{D}$表示、边界由D'表示。如果D有界且D'由有限条逐段连续可导的简单闭约当曲线组成，那么称D为正则的。

对于函数$w(z)$以及常数$K>0$、$0<\alpha<1$为两个常数，若

$|w(z)-w(z_0)|\leqslant|z-z_0|^{\alpha}$,则称它在$z_0$处适合具有$K$、$\alpha$的赫尔泰条件;若函数在集合$\Omega$的所有点适合具有相同的$K$、$\alpha$的赫尔泰条件,则称它在$\Omega$上适合一致赫尔泰条件;若在区域$D$内的函数在每个区域$D_1$、$\overline{D}_1\subseteq D$适合一致赫尔泰条件,则称它在$D$内是赫尔泰连续的。

定理4.1 如果存在导数

$$w'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0} \tag{4.7}$$

那么$w_z(z_0)$、$w_{\bar{z}}(z_0)$也存在,且

$$w_{\bar{z}}(z_0)=0 \tag{4.8}$$

$$w_z(z_0)=w'(z_0) \tag{4.9}$$

当$w_z(z)$、$w_{\bar{z}}(z)$在z_0的邻域内存在与连续又式(4.8)成立时式(4.9)存在。

在式(4.7)中$w(z_0)$为复常数,$w(z_0)=\lambda\cdot1+\mu\cdot i$($\lambda$、$\mu$为实常数)。今以$F(z)$、$G(z)$替代1、$i$并假定这些函数均定义在某个区域$D_0$内($\overline{D}\subset D_0$)

$$\operatorname{Im}[F(z)G(z)]>0$$

即对$z_0\in D$,可以找到唯一的实常数对λ_0、μ_0使

$$w(z_0)=\lambda_0F(z_0)+\mu_0G(z_0)$$

当存在有限极限

$$\dot{w}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-\lambda_0F(z)-\mu_0G(z)}{z-z_0} \tag{4.10}$$

时称$w(z)$在z_0处具有(F,G)-导数$\dot{w}(z_0)$。

令$F_z(z)$、$F_{\bar{z}}(z)$、$G_z(z)$、$G_{\bar{z}}(z)$存在并赫尔泰连续,满足上述情况的函数对称作在D_0内的生成对。对固定的z_0,记

$$W(z)=w(z)-\lambda_0F(z)-\mu_0G(z) \tag{4.11}$$

式中实常数λ_0、μ_0依

$$W(z_0)=0 \tag{4.12}$$

唯一确定。$W(z)$有连续偏导当且仅当$w(z)$具有连续偏导,$\dot{w}(z_0)$存在当且仅当$W'(z_0)$存在。如果$W'(z_0)$存在,那么$\dot{w}(z_0)=$

$W'(z_0)$。利用定理 4.1，就式(4.10)的存在性而言，$W_z(z_0)$、$W_{\bar{z}}(z_0)$存在同时和方程

$$W_{\bar{z}}(z_0)=0 \tag{4.13}$$

为必要条件，而$W_z(z)$、$W_{\bar{z}}(z)$在$|z-z_0|<r$内存在又连续以及式(4.13)却是充分条件。注意到

$$W(z)=\frac{\begin{vmatrix} w(z) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F(z) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}} \tag{4.14}$$

故式(4.13)可表达成

$$\begin{vmatrix} w_z(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_{\bar{z}}(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_{\bar{z}}(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}=0 \tag{4.15}$$

若式(4.10)存在，则

$$\dot{w}(z_0)=\frac{\begin{vmatrix} w_z(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_z(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_z(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}} \tag{4.16}$$

为方便，置

$$\begin{cases} a=-\dfrac{\overline{F}G_{\bar{z}}-F_{\bar{z}}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G} \\ A=-\dfrac{\overline{F}G_z-F_z\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G} \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\dfrac{FG_{\bar{z}}-F_{\bar{z}}G}{F\overline{G}-\overline{F}G} \\ B=\dfrac{FG_z-F_zG}{F\overline{G}-\overline{F}G} \end{cases} \tag{4.17}$$

称$a(z)$、$b(z)$、$A(z)$、$B(z)$为生成对(F,G)的特征系数，这样式(4.15)、式(4.16)可写成

$$w_{\bar{z}}=aw+b\overline{w} \tag{4.18}$$

$$\dot{w}=w_z-Aw-B\overline{w} \tag{4.19}$$

定理4.2 若$\dot{w}(z_0)$存在，则在z_0处w_z、$w_{\bar{z}}$存在且式(4.18)、式(4.19)成立；若w_z、$w_{\bar{z}}$在z_0处的某个邻域内存在且连续，式(4.18)在z_0处成立，则$\dot{w}(z_0)$存在且式(4.19)成立。

注意$F(z)$、$G(z)$具有(F,G)-导数，$\dot{F}\equiv\dot{G}\equiv 0$，而

$$\begin{aligned}&F_{\bar{z}}=aF+b\overline{F} \qquad G_{\bar{z}}=aG+b\overline{G}\\&F_z=AF+B\overline{F} \qquad G_z=AG+B\overline{G}\end{aligned} \tag{4.20}$$

与式(4.18)等价的实方程组为

$$\begin{cases}u_x-v_y=\alpha_{11}u+\alpha_{12}v\\u_y+v_x=\alpha_{21}u+\alpha_{22}v\end{cases} \tag{4.21}$$

其中$\alpha_{ij}(x,y)$为实赫尔泰连续函数。从某种意义上讲，式(4.1)等价于式(4.21)。

4.1.2 卡尔曼定理

对于函数$w(z)$，若$\dot{w}(z)$在区域D内处处存在，则称之为在D内的第一类正规(F,G)-准解析函数(简称为准解析函数)。

定理4.3 设生成元$F(z)$、$G(z)$是准解析的，$\dot{F}$、$\dot{G}$恒为零；若$w_1(z)$、$w_2(z)$均为准解析，则$w_3(z)=\alpha_1w_1(z)+\alpha_2w_2(z)$也是准解析的，且$\dot{w}=\alpha_1\dot{w}_1+\alpha_2\dot{w}_2$，式中$\alpha_1$、$\alpha_2$为实常数。

定理4.4 设$\rho(z)$为定义在有界区域D内的有界可测函数，记

$$q(z)=\iint_D\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.22}$$

(1) 若在D内$|\rho(z)|\leqslant M$，则对任何z有$|q(z)|\leqslant K_1M$，K_1仅取决于D的面积A；

(2) 对任意z_1、z_2，有

$$|q(z_1)-q(z_2)|\leqslant K_2M|z_1-z_2|\left[1+\log^+\frac{1}{|z_1-z_2|}\right] \tag{4.23}$$

式中K_2仅取决于D的直径L；

(3) 在闭包$\overline{D}$的余集的每个连通分支内$q(z)$是正规解析的，且

$$q_{\bar{z}}(z) = 0 \quad q_z(z) = \iint_D \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{4.24}$$

（4）若$\rho(z)$在D内点z_0满足赫尔泰条件，则$q_z(z_0)$、$q_z(z_0)$并

$$q_z(z_0) = -\pi\rho(z_0) \tag{4.25}$$

$$q_{\bar{z}}(z_0) = \iint_\Omega \frac{\rho(\zeta) - \rho(z_0)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \iint_{D \setminus \Omega} \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{4.26}$$

其中Ω为包括z_0的任意圆域，而且包括在D内；

（5）若$\rho(z)$在D内是赫尔泰连续的，则$q_z(z)$、$q_{\bar{z}}(z)$也在D内赫尔泰连续。

定理4.5 （1）若$w_z(z)$、$w_{\bar{z}}(z)$存在并连续，又式(4.18)成立，则$w(z)$是准解析的；(2)若$w(z)$是准解析的，则$w_z(z)$、$w_{\bar{z}}(z)$存在并赫尔泰连续。

定理4.6 设$w(z)$为定义在有界区域D内的有界可测函数。置

$$h(z) = w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{4.27}$$

（1）若$h(z)$解析，则$w(z)$为准解析函数；

（2）若$w(z)$是准解析的，则$h(z)$为解析函数。

证明：（1）当$h(z)$解析时取$\rho(z) = a(z)w(z) + b(z)\overline{w(z)}$，有$w(z) = h(z) - \frac{1}{\pi}q(z)$，而$q(z)$由式(4.22)定义。依定理4.3之(2)知$q$是赫尔泰连续的，并且$h(z)$也是赫尔泰连续，于是$w(z)$赫尔泰连续，$\rho(z)$也赫尔泰连续。因为$h_{\bar{z}}(z) = 0$，从式(4.25)推出$w(z)$满足式(4.18)，所以由定理4.5之(2)知$w(z)$是准解析函数。

对于(2)，假如$w(z)$是准解析的，取$z_0 \in D$，从式(4.11)、式(4.12)定义$w(z)$。设

$$k(z) = [W(z) - w(z)] + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a(\zeta)[W(\zeta) - w(\zeta)] + b\overline{[W(\zeta) - w(z)]}}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{4.28}$$

由4.1.1节的条件，$l(z)=W(z)-w(z)$有赫尔泰连续偏导。注意到式(4.20)，$l_{\bar{z}}(z)=al+b\bar{l}$。依定理4.4之(4)，式(4.28)中的积分有赫尔泰连续偏导。$k(z)$同样具有赫尔泰连续偏导，且因$k_{\bar{z}}(z)=0$知$k(z)$为解析函数。利用式(4.2)、式(4.28)，得

$$h(z)=-k(z)+W(z)+\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{a(\zeta)W(\zeta)+b(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.29}$$

于是

$$h(z_0)=-k(z_0)+\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{a(\zeta)W(\zeta)+b(\zeta)\overline{W(\zeta)}}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.30}$$

式(4.29)减式(4.30)，并乘$\frac{1}{z-z_0}$，导出

$$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=-\frac{k(z)-k(z_0)}{z-z_0}+\frac{W(z)}{z-z_0}+\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.31}$$

其中

$$\rho(\zeta)=a(\zeta)\frac{W(\zeta)}{\zeta-z_0}+b(\zeta)\overline{\frac{W(\zeta)}{\zeta-z_0}}$$

命$z\to z_0$，式(4.31)右边的第一项趋近于有限极限$-k'(z_0)$，第二项趋近于有限极限$\dot{w}(z_0)$。$\rho(z)$在D内除$z=z_0$之外是连续的，而且在z_0的邻域内也有界；使用定理4.4之(2)，式(4.31)中的积分部分趋近于有限极限，表明$h'(z_0)$存在。对$z_0\in D$，$h(z)$在D内解析。

定理4.5的证明。对于其(1)部分，由定理4.4推出；对于其(2)部分，因$w(z)$是准解析的，从(F,G)-导数定义知$w(z)$连续。不失一般性，认为$w(z)$在区域D内有界，应用定理4.6之(2)，由式(4.27)知$h(z)$是解析的，并由定理4.6之(1)中的推证知$w(z)$有赫尔泰连续偏导。

定理4.7 若$w(z)$在正则区域D的闭包$\overline{D}$上连续，又w_z、$w_{\bar{z}}$在D内(除某些孤立点外)存在并连续，则

$$\int_{D'} w(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2i\iint_D \frac{w_{\bar{\xi}}(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D'} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{w_{\bar{\xi}}(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (z \notin \overline{D}) \tag{4.33}$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D'} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{w_{\bar{\xi}}(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (z \in D) \tag{4.34}$$

注意D'为D的边界，重积分绝对收敛。

证明：将式(4.32)分成实部、虚部，这样就是简单的格林公式，式(4.32)用于函数

$$W(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}$$

即得式(4.33)。因为

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}W(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}$$

同样可证式(4.34)，首先从D内去掉$|\zeta-z|\leqslant\varepsilon$，然后令$\varepsilon\to0$，且注意到$w(\zeta)$在$\zeta=z$处连续，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 2\pi i w(z)$$

定理4.8 设$w(z)$在正则区域D的闭包$\overline{D}$上连续。

(1) 如果$w(z)$在D内是准解析的，那么

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D'} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (z \in D) \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D'} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0 \quad (z \notin \overline{D}) \tag{4.36}$$

(2) 如果式(4.35)成立，那么$w(z)$在D内是准解析的。

证明：(1) 从定理4.7及定理4.5即得；(2) 从定理4.6之(1)即得。

定理4.9 若$w(z)$在$0<|z-z_0|<r$内单值、准解析、有界，则$w(z)$在$z=z_0$处是准解析的。

证明：对 $0<\varepsilon<|z-z_0|<r_0<r$，由定理4.8之(1)，得

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_0}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi-$$

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\varepsilon<|\zeta-z_0|<r_0}=\frac{a(\zeta)w(\zeta)+b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

当 $\varepsilon\to0$ 时对每个固定的 z，第二个积分趋近于零，因为其模不超过 $\dfrac{\varepsilon M}{|z-z_0|-\varepsilon}$，$M$ 为 $|w(z)|$ 的一个上界；第三个积分趋近于扩展到 $|\zeta-z_0|<r$ 上的积分，因为被积函数的模不超过 $NM\ |\zeta-z|^{-1}$，N 为 $|a(z)|+|b(z)|$ 的一个上界。故对 $0<|z-z_0|<r_0$，有

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_0}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi-$$

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta-z_0|<r_0}\frac{a(\zeta)w(\zeta)+b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

注意以上两个积分都是 z 的连续函数，依定理4.8之(2)可知 $w(z)$ 在 $z=z_0$ 处是解析的。

卡尔曼定理 准解析函数 $W(z)$ 的零点均为孤立点，除非 $w(z)$ 恒为零。

定理4.10 设 $w(z)$ 在有界区域 D 内具有连续偏导。若存在常数 K，使

$$|w_{\bar{z}}(z)|\leqslant K|w(z)| \tag{4.37}$$

则或 $w(z)$ 恒为零或 $w(z)$ 的零点为孤立点。

称满足定理4.10假设条件的函数为近似解析的。让 $w_z(z)$、$w_{\bar{z}}(z)$ 在孤立点 z_1、z_2、…、z_k 处不存在，但在这些点的邻域内可由

$$|w_{\bar{z}}(z)|\leqslant\frac{K}{|z-z_j|^{\lambda}}|w(z)|\quad(0\leqslant\lambda<1) \tag{4.38}$$

替代式(4.37)。

为证明定理4.10，可设 D 内的某点 z_0 是 $w(z)$ 的零点的极限点，于是只需证明有 $R>0$，当 $|z-z_0|<R$ 时 $|w(z)|$ 恒为零。取 R 适当小，使闭域 $|z-z_0|\leqslant R$ 位于 D 内，且 $2RK<1$。不失一般性，让

$z_0=0$。依上述假定知必有一序列$\{z_0\}$,使

$$R>|z_v|>|z_{v+1}|\to 0 \quad w(z_v)=0$$

若在$|z|<R$内$w(z)$不恒为零,则存在一点z^*、$\delta>0$,使

$$0<\delta<|z^*|<|z^*|+\delta<R \quad \mu=\min_{|z-z^*|\leqslant\delta}|w(z)|>0 \tag{4.39}$$

命

$$W_{nm}(z)=\frac{w(z)}{(z-z_n)(z-z_{n+1})\cdots(z-z_{n+m})}$$

因为$w(z)$有连续偏导,

$$w(z)=O(|z-z_v|) \quad z\to z_v \quad (v=1,2,\cdots)$$

所以$W_{nm}(z)$在$z=z_v$处有界;在全部另外的点上$W_{nm}(z)$有连续偏导,并且

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}W_{nm}(z)=\frac{w_{\bar{z}}(z)}{(z-z_n)(z-z_{n+1})\cdots(z-z_{n+m})} \tag{4.40}$$

当$\varepsilon>0$适当小时使$|z_v-z_\mu|>2\varepsilon$,对$v\neq\mu$与v(或μ)$=n$、$n+1$、…、$n+m$以及$R-|z_v|>\varepsilon$。式(4.34)用于$W_{nm}(z)$和区域$|z|<R$、$|z-z_v|>\varepsilon$,而$v=n$、$n+1$、…、$n+m$。对$\varepsilon\to 0$,得

$$W_{nm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{W_{nm}(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<R}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}W_{nm}(z)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta-z} \tag{4.41}$$

注意$|z|<R$,而且$z=z_n$、z_{n+1}、…、z_{n+m}。

根据式(4.37)、式(4.40)

$$\left|\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}W_{nm}(\zeta)\right|\leqslant K|W_{nm}(\zeta)|$$

于是式(4.41)导出

$$|W_{nm}(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|W_{nm}(\zeta)|}{|\zeta-z|}|\mathrm{d}\zeta|+\frac{K}{\pi}\iint_{|\zeta|<R}\frac{W_{nm}(\zeta)}{|\zeta-z|}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

把上式$|z|<R$上对$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$积分,可推出

$$\iint\limits_{|z|<R} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\zeta - z|} \leqslant 2\pi R$$

利用不等式

$$\iint\limits_{|z|<R} |W_{nm}(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant R \int\limits_{|\zeta|=R} |W_{nm}(\zeta)||\mathrm{d}\zeta| +$$

$$2RK \iint\limits_{|\zeta|<R} |W_{nm}(\zeta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

也就是

$$\iint\limits_{|z|<R} |W_{nm}(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{R}{1-2RK} \int\limits_{|z|=R} |W_{nm}(z)||\mathrm{d}z|$$

有

$$\iint\limits_{|z-z^*|<\delta} |W_{nm}(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{R}{1-2RK} \int\limits_{|z|=R} |W_{nm}(z)||\mathrm{d}z| \tag{4.42}$$

固定m，当$n\to\infty$时对$R\geqslant|z|\geqslant\alpha>0$，有

$$|W_{nm}(z)|\to\frac{|w(z)|}{|z|^{m+1}}$$

$$\frac{R}{1-2RK} \int\limits_{|z|=R} |W_{nm}(z)||\mathrm{d}z| \to \frac{R}{1-2RK}\frac{1}{R^{m+1}} \int\limits_{|z|=R} |w(z)||\mathrm{d}z| = \frac{C}{R^{m+1}} \tag{4.43}$$

这里C不依赖于m，又

$$\iint\limits_{|z-z^*|<\delta} |W_{nm}(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to \iint\limits_{|z-z^*|<\delta} \frac{|w(z)|}{|z|^{m+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{\pi\mu\delta^2}{(\theta R)^{m+1}} \tag{4.44}$$

式中

$$0<\theta=\frac{|z^*|+\delta}{R}<1$$

从式(4.42)、式(4.43)、式(4.44)知

$$\mu<\frac{C}{\pi\delta^2}\theta^m$$

当$m\to\infty$时$\mu=0$，这与式(4.38)矛盾，故定理4.10获证。

4.1.3 第二类准解析函数

定理4.11 设$w(z)$恒不为零并在有界区域D内是准解析的，且

$$\dot{t}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_D\left[a(\zeta)+b(\zeta)\frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)}\right]\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta-z} \tag{4.45}$$

$t(z)$对z的任意值一致连续，另

$$|t(z)|\leqslant k \tag{4.46}$$

k是只依赖于D与(F,G)的一个常数，于是

$$f(z)=e^{t(z)}w(z)$$

在D内解析。

证明：设D^*是从区域D内除去$w(z)$的孤立零点的区域，函数$\rho(z)=a(z)+b(z)\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)}$在$D^*$内确定而且赫尔泰连续，又$|\rho(z)|\leqslant M$，$M$为$|a(z)+b(z)|$ 在D内的一个上界。利用定理4.4知式(4.46)成立、$t(z)$是一致连续的，在D^*内$t_z(z)$、$t_{\bar{z}}(z)$存在、赫尔泰连续，表明$t_{\bar{z}}=-a-b\dfrac{\overline{w}}{w}$，于是在$D$内解析。

定理4.12 设$w(z)$在有界区域内是准解析的又在$\overline{D}$上连续。如果在边界D'上$|w(z)|\leqslant M$，那么在D内$|w(z)|\leqslant K^2M$，K是仅取决于D和(F,G)的常数。

事实上，对$f(z)=e^{t(z)}w(z)$应用最大模原理，在D'上$|f(z)|\leqslant KM$。

定理4.13 设$w(z)$在$|z-z_0|<R$内是准解析的。如果$|w(z)|\leqslant M$，且$w(z_0)=0$，那么$|w(z)|\leqslant\dfrac{K^2M}{R}|z-z_0|$。其中$K$仅依赖于$z_0$、$R$、$(F,G)$。

证明：以D表示$|z-z_0|<R$，利用施瓦兹定理知$f(z)=e^{t(z)}w(z)$。

定理4.14 (1) 若$w(z)$在$z=z_0$处准解析，又$w(z_0)=0$，则或$w(z)$恒为零或

$$w(z)\sim\alpha(z-z_0)^n \quad (z\to z_0,\alpha\neq 0) \tag{4.47}$$

式中n是正整数，此时称z_0为$w(z)$的n级零点；

(2) 若$w(z)$在$z=z_0$处准解析，而λ、μ为实常数使$w(z_0)=\lambda F(z_0)+\mu G(z_0)$，则

$$w(z)=\lambda F(z)+\mu G(z) \tag{4.48}$$

或存在正整数n，使

$$w(z)=\lambda F(z)+\mu G(z)+\alpha(z-z_0)^n[1+o(1)]$$
$$(z\to z_0,\alpha\neq 0) \tag{4.49}$$

称$w(z)$在$z=z_0$处取$w(z_0)n$重。

证明：(1) 令$r>0$适当小，使$w(z)$在D：$|z-z_0|<r$内是准解析，应用定理4.11，$e^{-t(z)}=e^{-t(z_0)}[1+o(1)](z\to z_0)$，且

$$e^{t(z)}w(z)=\alpha_0(z-z_0)^n[1+\alpha_1(z-z_0)+\cdots] \quad (\alpha_0\neq 0)$$

这样得到式(4.48)，而$\alpha=\alpha_0 e^{-t(z_0)}$；(2)应用(1)于下式

$$w_1(z)=w(z)-\lambda F(z)-\mu G(z)$$

定理4.15 若$w(z)$在$0<|z-z_0|<r$内是单值、准解析的，则下列三种情况之一成立：

(1) $w(z)$在$z=z_0$处连续；

(2) $w(z)$在$z=z_0$处有n级极点，

$$w(z)\sim\alpha(z-z_0)^{-n} \quad (z\to z_0,\alpha\neq 0) \tag{4.50}$$

式中n为正整数；

(3) $w(z)$以z_0为本性奇点，也就是对每个复数β均有

$$\varliminf_{z\to z_0}|w(z)-\beta|=0 \tag{4.51}$$

证明：在$0<|z-z_0|<r$应用定理4.11，(1)、(2)、(3)依z_0是解析函数$e^{t(z)}w(z)$的或正规点或极点或本性奇点。

设$w(z)$、$f(z)$定义在区域D内。如果在D的闭包$\overline{D}$上存在一个连续而且恒不为零的函数$t(z)$，使在D内$f(z)=t(z)w(z)$，则称$w(z)$和$f(z)$在D内相似。

相似原理 若D为有界区域，则定义在D内的每个准解析函数$w(z)$具有一个相似的解析函数$f(z)$；反之，定义在D内的每个

解析函数$f(z)$具有一个相似的准解析函数$w(z)$。当两个函数之一确定时另一个函数可任意选取，使

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{w(z)}=\alpha \tag{4.52}$$

这里z_0为$\overline{D}$的一个给定点，α为一个非零的给定数。

根据生成对(F,G)的条件，每个函数$w(z)$有唯一的表达式。

$$w(z)=\varphi(z)F(z)+\psi(z)G(z) \tag{4.53}$$

式中$\varphi(z)$、$\psi(z)$为实函数。取

$$\Omega(z)=\varphi(z)+i\psi(z) \tag{4.54}$$

依式(4.53)，$\overline{w}=\varphi\overline{F}+\psi\overline{G}$，结合式(4.53)，得

$$\Omega(z)=P(z)w(z)+Q(z)\overline{w(z)} \tag{4.55}$$

$$P=\frac{\overline{G}-i\overline{F}}{F\overline{G}-\overline{F}G}\qquad Q=-\frac{G-iF}{F\overline{G}-\overline{F}G} \tag{4.56}$$

w与Ω之间为双射；记

$$w={}^{*}\Omega\qquad \Omega={}_{*}w\qquad (\mathrm{mod}F,G)$$

而且

$${}_{*}(\lambda w_1+\mu w_2)=\lambda({}_{*}w_1)+\mu({}_{*}w_2)$$

$${}_{*}\theta=0\qquad {}_{*}F=1\qquad {}_{*}G=i\qquad (\lambda、\mu\text{为实常数})$$

在每个闭区域$\overline{D}$内

$$0<\frac{1}{K}\leqslant\left|\frac{{}_{*}w(z)}{w(z)}\right|\leqslant K$$

其中K仅依赖于(F,G)与区域D。

如果$w(z)$为第一类准解析函数，那么$\Omega(z)={}_{*}w(z)$称为第二类准解析函数。实际上，每个复常数是第二类准解析函数。

定理4.16 $\Omega(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$为第二类$(F,G)$准解析函数当且仅当$\varphi$、$\psi$具有连续偏导，同时

$$F\varphi_{\bar z}+G\psi_{\bar z}=0 \tag{4.57}$$

在上述条件下命$w={}_{*}\Omega$，有

$$\dot{w}=F\varphi_z+G\psi_z \tag{4.58}$$

证明：利用定理4.1、定理4.5，并任意依式(4.11)规定的

$W(z)$，得

$$W(z)=[\varphi(z)-\varphi(z_0)]F(z)+[\psi(z)-\psi(z_0)]G(z)$$

推出

$$W_{\bar{z}}(z_0)=F(z_0)\varphi_{\bar{z}}(z_0)+G(z_0)\psi_{\bar{z}}(z_0)$$

$$W_z(z_0)=F(z_0)\varphi_z(z_0)+G(z_0)\psi_z(z_0)$$

今置

$$-i\,\frac{G}{F}=\sigma+i\tau \qquad -i\,\frac{F}{G}=\tilde{\sigma}+i\tilde{\tau} \tag{4.59}$$

式中σ、$\tilde{\sigma}$、τ、$\tilde{\tau}$为实函数，表明$\sigma>0$。式(4.57)等价于实方程组：

$$\begin{cases}\varphi_x=\tau\psi_x+\sigma\psi_y\\ \varphi_y=-\sigma\psi_x+\tau\psi_y\end{cases} \tag{4.60}$$

若φ_x、φ_y具有连续二次偏导，则通过求导可从式(4.60)中消去一个未知数，得出方程：

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\tilde{\alpha}\,\varphi_y+\tilde{\beta}\,\varphi_y=0 \tag{4.61}$$

$$\psi_{xx}+\psi_{yy}+\alpha\,\psi_x+\beta\,\psi_y=0 \tag{4.62}$$

且

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\sigma_x+\tau_y}{\sigma} \qquad \beta=\frac{\sigma_y-\tau_x}{\sigma}\\ \tilde{\alpha}&=\frac{\tilde{\sigma}_x+\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}} \qquad \tilde{\beta}=\frac{\tilde{\sigma}_y-\tilde{\tau}_x}{\tilde{\sigma}}\end{aligned} \tag{4.63}$$

下述定理确认了这种消去法。

定理 4.17 设α、β、$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$由式(4.59)、式(4.63)确定，实函数φ(或ψ)是一个第二类准解析函数的实部(或虚部)当且仅当它有赫尔泰连续二次偏导，并满足式(4.61)(或式(4.62))。

定理 4.18 若$\Omega(z)$为定义在正则区域D内的亚纯准解析函数，又$\Omega(z)$在边界D'上连续且恒不为Ω_0，则

$$N_D(\Omega-\Omega_0)-N_D\left(\frac{1}{\Omega}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{D'}\mathrm{d}\,\log[\Omega(z)-\Omega_0] \tag{4.64}$$

式中$N_D(\Omega-\Omega_0)$表示$\Omega(z)-\Omega_0$在D内零点两个数、$N_D\left(\frac{1}{\Omega}\right)$表示极点的个数，每个零点与极点按其重数计算个数。

证明：在假定条件下数 $N_D(\Omega-\Omega_0)$、$N_D\left(\frac{1}{\Omega}\right)$ 是有限的，而且在式(4.64)中的积分是完全确定的。现需证明：当$\Omega(z)-\Omega_0$ 在$z=z_0$ 处有 n 级零点(或 n 级极点)时取 ε 为充分小的正数，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \mathrm{d}\log[\Omega(z)-\Omega_0]=n \quad (\text{或}-n) \tag{4.65}$$

但此时

$$^*[\Omega(z)-\Omega_0]=\alpha(z-z_0)^l[1+o(1)]$$

依式(4.53)，得

$$\Omega(z)-\Omega_0=P(z)\alpha_0(z-z_0)^l+Q(z)\bar{\alpha}_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^l+$$
$$o(|z-z_0|^l)=P_0\alpha_0(z-z_0)^l[1+T(z)]$$

这里 $P_0=P(z_0)$，对充分小的 $|z-z_0|$，有 $|T(z)|<1$，导出式(4.65)；$l=\pm n$。

4.2 微积分法

4.2.1 生成序列

今设$(\widetilde{F},\widetilde{G})$、$(F$、$G)$为生成对；若

$$\widetilde{F}\equiv a_{11}F+a_{12}G \qquad \widetilde{G}\equiv a_{21}F+a_{22}G \tag{4.66}$$

其中 a_{ij}为实常数，则称$(\widetilde{F},\widetilde{G})$与$(F,G)$是等价的。

定理4.19 (1) 定义在同一个区域内的两个生成对是等价的当且仅当其具有同样的特征系数；(2) 若(F,G)、$(\widetilde{F},\widetilde{G})$是等价的，则每个第一类$(\widetilde{F},\widetilde{G})$准解析函数为第一类$(F,G)$准解析函数，并且

$$\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w=\frac{\mathrm{d}_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}}{\mathrm{d}z}w$$

记

$$\dot{w}=\frac{\mathrm{d}_{(F,(T))}}{\mathrm{d}z}w$$

表示 w 的(F,G)导数。

证明：(1) 必要性是显然的；考虑充分性。设(F,G)、$(\widetilde{F},\widetilde{G})$有

相同的特征系数，并使

$$f(z)=\widetilde{F}(z)-a_{11}F(z)-a_{12}G(z)$$

$$g(z)=\widetilde{G}(z)-a_{21}F(z)-a_{22}G(z)$$

在 $z=z_0$ 处为零。依特征系数的定义

$$f_{\bar{z}}=af+b\overline{f} \tag{4.67}$$

$$f_z=Af+B\overline{f} \tag{4.68}$$

式中 a、b、A、B 为 (F,G) 的特征系数。式(4.67)表明 $f(z)$ 为近似准解析的，式(4.68)可写成

$$\overline{f}_{\bar{z}}=\overline{A}\,\overline{f}+\overline{B}f$$

于是 $\overline{f(z)}$ 为近似解析的。当 $f(\bar{z})\neq 0$ 时由定理4.14可知存在正整数 n、m 与非零常数 α、β 使

$$f(z)\sim\alpha(z-z_0)^n \quad \overline{f(z)}\sim\beta(z-z_0)^m \quad (z\to z_0)$$

因为据此推出不合理关系

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{(z-z_0)^n}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^m}\sim 1 \quad (z\to z_0)$$

所以 $f(z)\equiv 0$。同理可证 $g(z)\equiv 0$。

(2) 是显然的。

注意一个第二类 $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 准解析函数可从一个第二类 (F,G) 准解析函数 $\Omega(z)$ 经 Ω 平面上的一个仿射变换得到；或者说，若 $\Omega=\varphi F+\psi G=\varphi\widetilde{F}+\psi\widetilde{G}$，则 $\varphi=a_{11}\widetilde{\varphi}+a_{21}\widetilde{\psi}$ 和 $\psi=a_{12}\widetilde{\varphi}+a_{22}\widetilde{\psi}$。

当生成对 (F,G)、$(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 满足

$$F\widetilde{G}\equiv\widetilde{F}G$$

时称它们是相似的。

现以 $a_{(F,G)}$、$b_{(F,G)}$、…表示生成对 (F,G) 的特征系数 a、b、…，依 $a_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}$、$b_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}$、…表示生成对 $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 的相应的特征系数等等。

定理 4.20 若 (F,G)、$(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 是相似的生成对，且 $H(z)=\dfrac{\widetilde{F}(z)}{F(z)}=\dfrac{\widetilde{G}(z)}{G(z)}$，则

(1) $\quad a_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}=a_{(F,G)}+\dfrac{H_{\bar{z}}}{H} \quad A_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}=A_{(F,G)}+\dfrac{H_z}{H}$

$$b_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}=\frac{H}{\overline{H}}b_{(F,G)} \qquad B_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}=\frac{H}{\overline{H}}B_{(F,G)}$$

(2) 若 $w(z)$ 为第一类 (F,G) 准解析函数，则 $H(z)w(z)$ 是 $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 准解析的，且

$$\frac{\mathrm{d}_{(HF,HG)}}{\mathrm{d}z}Hw=H\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w$$

(3) 每个第二类 (F,G) 准解析函数也是 $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ 准解析的。

定理 4.21 若 (F,G) 为生成对，则 $(-\overline{F},\overline{G})$ 也是生成对，同时(1)

$$a_{(-\overline{F},\overline{G})}=\overline{A}_{(F,G)} \qquad A_{(-\overline{F},\overline{G})}=\overline{a}_{(F,G)}$$

$$b_{(-\overline{F},\overline{G})}=\overline{B}_{(F,G)} \qquad B_{(-\overline{F},\overline{G})}=\overline{b}_{(F,G)}$$

(2) 若 $w(z)$ 为第一类 (F,G) 准解析函数，则 $\overline{\Omega(z)}$ 为 $\overline{z}$ 的 $(-\overline{F},\overline{G})$ 准解析函数，同时

$$\frac{\mathrm{d}_{(-\overline{F},\overline{G})}}{\mathrm{d}\overline{z}}\overline{w}=\frac{\overline{\mathrm{d}}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w$$

(3) 若 $\Omega(z)$ 为第二类 (F,G) 准解析函数，则 $-\overline{\Omega(z)}$ 为 $\overline{z}$ 的第二类 $(-\overline{F},\overline{G})$ 准解析函数。

事实上，设 (F,G) 为生成对，其伴随生成对 $(F,G)^*=(F^*,G^*)$ 是由式

$$F^*=-\frac{2\overline{F}}{F\overline{G}-\overline{F}G} \qquad G^*=\frac{2\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}$$

定义的。

定理 4.22 若 $(F,G)^{**}=(F,G)$。且 $(F^*,G^*)=(F,G)^*$，则

$$a_{(F^*,G^*)}=-a_{(F,G)} \qquad A_{(F^*,G^*)}=-A_{(F,G)}$$

$$b_{(F^*,G^*)}=-\overline{B}_{(F,G)} \qquad B_{(F^*,G^*)}=-\overline{b}_{(F,G)}$$

定理 4.23 若 $a(z)$、$b(z)$ 为定义在区域 D 内的有界赫尔泰连续函数，则在 D 内存在可使 $a_{(F,G)}\equiv a$、$b_{(F,G)}\equiv b$ 的生成对 (F,G)。

定理 4.23 表明准解析函数可用式(4.18)来定义，以替代对 (F,G) 可导性的要求。

命 (F,G)、(F_1,G_1) 为生成对，当

$$a_{(F_1,G_1)}=a_{(F,G)} \quad b_{(F_1,G_1)}=-B_{(F,G)} \tag{4.69}$$

时称(F_1,G_1)为(F,G)的一个后继，称(F,G)为(F_1,G_1)的一个前趋。

定理 4.24 如果(F_1,G_1)为(F,G)的后继，那么$(F,G)^*$为$(F_1,G_1)^*$的后继。

定理 4.25 若(F,G)是D内的生成对，令D_1是有界区域，且$\overline{D}_1\subset D$，则

(1) 在D_1内(F,G)有一个后继；

(2) 在D_1内(F,G)有一个前趋。

利用定理4.23、定理4.24、定理4.22即可证明。

设$\{(F_\nu,G_\nu)\}$为一列生成对。如果$(F_{\nu+1},G_{\nu+1})$为(F_ν,G_ν)的后继，那么称$\{(F_\nu,G_\nu)\}$为生成序列，而ν为整数；如果$(F_0,G_0)=(F,G)$，那么称(F,G)嵌入于$\{(F_\nu,G_\nu)\}$中。

从定理4.25可以断言：若(F,G)为D内的生成对，且D_1为有界区域、$\overline{D}_1\subset D$，则(F,G)可嵌入于D_1内的一个生成序列。

对于$\{(F_\nu,G_\nu)\}$为生成序列，当$(F_{\nu+\mu},G_{\nu+\mu})$等价于$(F_\nu,G_\nu)$时称$\{(F_\nu,G_\nu)\}$具有周期$\mu(>0)$，反之称$\{(F_\nu,G_\nu)\}$是非周期的。

显然存在给定周期μ的生成序列。取$F(z)$、$G(z)$、$\widetilde{F}(z)$、$\widetilde{G}(z)$为解析函数，于是(F,G)等价于$(\widetilde{F},\widetilde{G})$。$(\widetilde{F},\widetilde{G})$为$(F,G)$的后继当且仅当$\dfrac{F(z)}{G(z)}$恒为常数。这样选择$\mu-1$个不同的解析函数$F_\nu(z)$，序列

$$(1,i)、(F_1,iF_1)、(F_2,iF_2)、\cdots、(F_{\mu-1},iF_{\mu-1})、(1,i)\cdots$$

为具有同周期μ的生成序列。

在区域D内的生成对(F,G)的最小周期是在D内能使(F,G)嵌入其中的一个生成序列的最小周期。

定理 4.26 一个生成对以其自身为后继(即最小周期为1)当且仅当

$$\frac{F(z)}{G(z)}=X(y) \tag{4.70}$$

证明：(F,G)为其自身的后继当且仅当$b_{(F,G)}+B_{(F,G)}=0$。因为

$$\begin{aligned} b_{(F,G)} &= -\frac{G^2}{F\overline{G}-\overline{F}G}\left(\frac{F}{G}\right)_{\bar{z}} \\ B_{(F,G)} &= -\frac{G^2}{F\overline{G}-\overline{F}G}\left(\frac{F}{G}\right)_{z} \end{aligned} \tag{4.71}$$

所以上述条件等价于$\left(\frac{F}{G}\right)_z+\left(\frac{F}{G}\right)_{\bar{z}}=0$。

4.2.2 微分法

定理4.27 若$w(z)$是(F,G)准解析的，又(F_1,G_1)是(F,G)的一个后继，则$\dot{w}(z)=\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w(z)$为$(F_1,G_1)$准解析的。

证明：设$\Omega=F\varphi_z+i\psi=_* w(\mathrm{mod}\ F,G)$，依定理4.16，

$$\dot{w}=F\varphi_z+G\psi_z \tag{4.72}$$

$$0=F\varphi_{\bar{z}}+G\psi_{\bar{z}} \tag{4.73}$$

推出

$$0=\overline{F}\varphi_z+\overline{G}\psi_z \tag{4.74}$$

由式(4.72)、式(4.74)，得

$$\varphi_z=\frac{\overline{G}\dot{w}}{F\overline{G}-\overline{F}G} \quad \psi_z=-\frac{\overline{F}\dot{w}}{F\overline{G}-\overline{F}G} \tag{4.75}$$

式(4.72)表明$\dot{w}(z)$有赫尔泰连续偏导。注意到式(4.73)，有

$$\begin{aligned} (\dot{w})_{\bar{z}} &= F_{\bar{z}}\varphi_z+G_{\bar{z}}\psi_z+F\psi_{z\bar{z}}+G\psi_{z\bar{z}} \\ &= F_{\bar{z}}\varphi_z+G_{\bar{z}}\psi_z-F_z\varphi_{\bar{z}}-G_z\psi_{\bar{z}} \end{aligned} \tag{4.76}$$

推证中使用了

$$F\varphi_{z\bar{z}}+G\psi_{z\bar{z}}=(F\varphi_{\bar{z}}+G\psi_{\bar{z}})_z-F_z\varphi_{\bar{z}}-G_z\psi_{\bar{z}}$$

依式(4.17)，

$$(\dot{w})_{\bar{z}}=a\dot{w}-B\overline{\dot{w}}$$

不难发现：若$\dot{w}(z)=\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w=0$，则$w(z)\equiv\lambda F(z)+\mu G(z)$，这

里λ、μ为实常数。

定理4.28 设$w(z)$是在$0<|z-z_0|<r$内的(F,G)准解析函数。如果

$$w(z)\sim\alpha(z-z_0)^n \quad z\to z_0 \quad (\alpha\neq 0, n\text{ 为整数})$$

那么对每个$\theta\in(0,1)$及每个$R\in(0,r)$，存在$K>0$，使

$$|w(z)-\alpha(z-z_0)^n|\leqslant K|z-z_0|^{n+\theta} \quad 0<|z-z_0|\leqslant R$$

证明：将区域$|z-z_0|<r$作为D，类似于式(4.45)对$t(z)$的定义，则

$$w(z)=e^{-t(z)}\alpha_0(z-z_0)^n[1+h(z)]$$

式中$h(z)$在$|z-z_0|<r$内正规解析，

$$\alpha_0 e^{-t(z)}=0 \quad h(z_0)=0$$

结果

$$w(z)-\alpha(z-z_0)^n=\alpha(z-z_0)^n h(z)+$$
$$\alpha(z-z_0)^n[e^{t(z_0)-t(z)}-1][1+h(z)] \tag{4.77}$$

$h(z)=O(|z-z_0|)$，当$z\to z_0$时；并在$|z-z_0|\leqslant R$一致有界。$t(z)$满足对每个$\theta\in(0,1)$的一致赫尔泰条件，利用式(4.4)，有

$$|e^{t(z_0)-t(z)}-1|=O(|z-z_0|^\theta) \quad z\to z_0$$

当K充分大时式(4.77)右边的模不超过$K|z-z_0|^{n+\theta}$。

定理4.29 设$w(z)$在z_0处为(F,G)准解析的，而$\dot{w}=\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}}w$。当

$$w(z)=\lambda F(z)+\mu G(z)+\alpha(z-z_0)^n+$$
$$o(|z-z_0|^n) \quad z\to z_0 \quad (n\geqslant 1, \alpha\neq 0)$$

时有

$$\dot{w}(z)\sim n\alpha(z-z_0)^{n-1} \quad z\to z_0 \tag{4.78}$$

其中λ、μ为实常数。

证明：$\dot{w}(z)$在z_0处是(F_1,G_1)准解析的。若$n=1$，则$\dot{w}(z_0)=\alpha$且式(4.78)成立。对$n>1$的情况，由$\dot{F}\equiv\dot{G}\equiv 0$进一步取$\lambda=\mu=0$，于是命

$$w(z) \sim \alpha(z-z_0)^n \quad z \to z_0 \quad (n>1, \alpha \neq 0)$$

因为用一个等价生成对替代(F,G)，$\dot{w}(z)$保持不变；不失一般性，令$F(z_0)=1$、$G(z_0)=i$，所以

$$\begin{aligned} F(z) &= 1+O(|z-z_0|) \\ G(z) &= i+O(|z-z_0|) \end{aligned} \quad z \to z_0 \tag{4.79}$$

当$\dot{w}(z_0)=0$时由定理4.14，得

$$\dot{w}(z) \sim \beta(z-z_0)^m \quad z \to z_0 \quad (\beta \neq 0, m \geqslant 1)$$

注意$\dot{w}(z) \neq 0$。设$w(z)=\varphi+i\psi={}_*w(z) \pmod{F,G}$依定理4.28，

$$\dot{w}(z)=\beta(z-z_0)^m+O(|z-z_0|^{m+\theta}) \quad (0<\theta<1)$$

由式(4.79)，式(4.75)，有

$$\varphi_z(z)=\frac{1}{2}\beta(z-z_0)^m+O(|z-z_0|^{m+\theta}) \tag{4.80}$$

但

$$\mathrm{d}\varphi=\varphi_x \mathrm{d}x+\varphi_y \mathrm{d}y=\mathrm{Re}(2\varphi_z \mathrm{d}z)$$

而$\varphi(z_0)=0$，从式(4.80)知

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 2\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \varphi_\zeta(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{m+1}(z-z_0)^{m+1}\right]+O(|z-z_0|^{m+1+\theta}) \end{aligned}$$

同样，

$$\psi(z)=\mathrm{Re}\left[-\frac{i\beta}{m+1}(z-z_0)^{m+1}\right]+O(|z-z_0|^{m+1+\theta})$$

依式(4.80)，

$$w(z)=\varphi(z)F(z)+\psi(z)G(z) \sim \frac{\beta}{m+1}(z-z_0)^{m+1}$$

故$m+1=n$并且$\beta=n\alpha$。

考察嵌入于生成序列$\{(F_\nu,G_\nu)\}$中的一个生成对(F,G)，(F,G)准解析函数的各阶(次)导数利用下式定义

$$w^{(0)}(z)=w(z) \quad (n\text{ 为非负整数})$$

$$w^{(n+1)}(z)=\frac{\mathrm{d}_{(F_n,G_n)}}{\mathrm{d}z}w(z) \tag{4.81}$$

显然$w^{(1)}=\dot{w}$。一般而言，$w^{(n)}(z)$取决于生成序列；若取适当的实数λ_0、μ_0使$w(z)-\lambda_0F(z)-\mu_0G(z)$在$z=z_0$处有$n$级零点，则第$n$次（阶）导数和下述性质的生成序列无关：

(1) 在定理4.29的条件下$w^{(n)}(z_0)=n!\alpha$；

(2) 当$w(z)$在$z=z_0$处是准解析的且$w^{(n)}(z_0)=0$时$w(z)\equiv 0$。

4.2.3 积分法

设(F,G)为生成对，Γ为从z_0连接到Z_0的可求长曲线，$W(z)$是定义在Γ上的连续函数。

定义沿Γ的W的$(F,G)*$积分

$$*\int_\Gamma W\mathrm{d}_{(F,G)}z=\mathrm{Re}\int_\Gamma\frac{2\overline{G}W\mathrm{d}z}{F\overline{G}-\overline{F}G}-i\,\mathrm{Re}\int_\Gamma\frac{2\overline{F}\mathrm{d}z}{F\overline{G}-\overline{F}G}\tag{4.82}$$

定义沿Γ的w的(F,G)积分

$$\int_\Gamma W\mathrm{d}_{(F,G)}z=F(z_0)\mathrm{Re}*\int_\Gamma W\mathrm{d}_{(F,G)}z+G(z_0)\mathrm{Im}*\int_\Gamma W\mathrm{d}_{(F,G)}z\tag{4.83}$$

由式(4.82)，式(4.83)推出

$$*\int_\Gamma(\lambda W_1+\mu W_2)\mathrm{d}_{(F,G)}z=\lambda*\int_\Gamma W_1\mathrm{d}_{(F,G)}z+\mu*\int_\Gamma W_2\mathrm{d}_{(F,G)}z\tag{4.84}$$

这里λ、μ为实常数。

$$*\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}W\mathrm{d}_{(F,G)}z=*\int_{\Gamma_1}W\mathrm{d}_{(F,G)}z+*\int_{\Gamma_2}W\mathrm{d}_{(F,G)}z\tag{4.85}$$

$$\left|*\int_\Gamma W\mathrm{d}_{(F,G)}z\right|\leqslant K\int_\Gamma|W||\mathrm{d}z|\tag{4.86}$$

式中K为仅依赖于(F,G)的常数。对于(F,G)积分类似于式(4.84)、式(4.86)的关系式也成立。注意(F,G)积分不是积分路径的可加函数。

取$W(z)$为定义在区域D内的连续函数。若对于D的单连通子区域内的每条闭曲线Γ，得

$$\oint_\Gamma W \mathrm{d}_{(F,G)} z = 0 \tag{4.87}$$

则称$W(z)$是(F,G)可积的。

定理4.30 (F,G)准解析函数$w(z)$的(F,G)导数$\dot{w}(z)$是(F,G)可积的，同时

$$* \int_{z_0}^{z} \dot{w} \, \mathrm{d}_{(F,G)} z = \Omega(z) - \Omega(z_0) \tag{4.88}$$

$$\Omega(z) = {}_* w(z) \quad (\mathrm{mod}\ F, G)$$

$$\int_{z_0}^{z} \dot{w} \, \mathrm{d}_{(F,G)} z = w(z) - \varphi(z_0) F(z) - \psi(z_0) G(z) \tag{4.89}$$

$$\varphi + i\psi = \Omega$$

事实上，依式(4.75)、式(4.82)及

$$\mathrm{d}\varphi = 2\mathrm{Re}(\varphi_z \mathrm{d}z) \quad \mathrm{d}\psi = 2\mathrm{Re}(\psi_z \mathrm{d}z)$$

即证。

定理4.31 若$W(z)$是单连通区域D内的连续函数并且(F,G)可积，则在D内存在一个(F,G)准解析函数$w(z)$使$W(z) = \dfrac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} w(z)$

对于多连通区域定理4.31也正确，不过$W(z)$可能是多值的。在定理条件下

$$\Omega(z) = \varphi(z) + i\psi(z) = * \int_{z_0}^{z} W \mathrm{d}_{(F,G)} z$$

是完全确定的函数，具有连续偏导，固定点$z_0 \in D$。

证明：

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\overline{G} W \mathrm{d}z - G \overline{W} \mathrm{d}\bar{z}}{F\overline{G} - \overline{F} G} \tag{4.90}$$

它和以下积分相同，

$$\varphi(z) = 2\int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{G} W}{F\overline{G} - \overline{F} G} \right) \mathrm{d}x - \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{G} W}{F\overline{G} - \overline{F} G} \right) \mathrm{d}y$$

由假设，此线积分与路径无关。同样

$$\psi(z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{\overline{F}W\mathrm{d}z - F\overline{W}\mathrm{d}\overline{z}}{F\overline{G} - \overline{F}G} \tag{4.91}$$

应用式(4.90)、式(4.91)，

$$\varphi_z = \frac{\overline{G}W}{F\overline{G}-\overline{F}G} \quad \varphi_{\overline{z}} = -\frac{G\overline{W}}{F\overline{G}-\overline{F}G}$$

$$\psi_z = -\frac{\overline{F}G}{F\overline{G}-\overline{F}G} \quad \psi_{\overline{z}} = \frac{F\overline{W}}{F\overline{G}-\overline{F}G}$$

故

$$F\varphi_{\overline{z}} + G\psi_{\overline{z}} = 0 \quad F\psi_z + G\psi_z = W$$

根据定理4.16知$w=\varphi F+\psi G$是(F,G)准解析的且$\dot{w}=W$。

定理4.32 若(F_1,G_1)为(F,G)的后继，又$W(z)$是(F_1,G_1)准解析函数，则$W(z)$是(F,G)可积的。

证明：为此证明：当D为正则区域时闭包$\overline{D}$位于$W(z)$的定义区域内，有

$$*\int_{D'} W\mathrm{d}_{(F,G)}z = 0 \tag{4.92}$$

这里D'为D的边界。设$(F^*,G^*)=(F,G)^*$为4.2.1节所定义的(F,G)的伴随生成对，则对每个W，

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, *\int_{D'} W\mathrm{d}_{(F,G)}z &= \mathrm{Re}\int_{D'} G^* W\mathrm{d}z \\ \mathrm{Im}\, *\int_{D'} W\mathrm{d}_{(F,G)}z &= \mathrm{Re}\int_{D'} F^* W\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{4.93}$$

据定理(4.22)，

$$F_{\overline{z}}^* = -aF^* - \overline{B}\,\overline{F^*} \quad G_{\overline{z}}^* = -aG^* - \overline{B}\,\overline{G^*}$$

依假设

$$W_{\overline{z}} = aW - B\overline{W}$$

其中a、b、A、B为(F,G)的特征系数，利用格林公式，

$$\begin{aligned} \int_{D'} F^* W\mathrm{d}z &= 2i\iint_D (F^* W)_{\overline{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2i\iint_D (-aF^* W - \overline{B}\,\overline{F^*} W + F^* aW - F^* B\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

$$= -4i\iint_D \mathrm{Re}(F^* B\overline{W})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为纯虚数。同理

$$\mathrm{Re}\int_{D'} G^* W\mathrm{d}z = 0$$

表明式(4.92)、式(4.93)随之成立。

以定理4.32、定理4.31为基础可以得出进一步的论断：

(1) 若(F_1,G_1)为(F,G)的一个后继，则每个(F_1,G_1)准解析函数是一个函数的(F,G)导数；

(2) 若(F_{-1},G_{-1})为(F,G)的一个前趋，则一个连续函数是(F,G)准解析的当且仅当它是(F_{-1},G_{-1})可积的。

4.2.4 黎曼曲面上的准解析性

定理4.33 设$(F(z),G(z))$是定义于区域D内的生成对，$w(z)$是定义于区域$D_1\subset D$内的(F,G)准解析函数且$\dot{w}(z)=\dfrac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}w(z)$；又设$z=X(\zeta)$为区域$\Delta$到$D$上的一对一的保角变换，它将$\Delta$的子区域$\Delta_1$变换到$D_1$。令$F[X(\zeta)]=\Phi(\zeta)$、$G[X(\zeta)]=\Psi(\zeta)$，则

(1) (Φ,ψ)为Δ内的生成对；

(2) 函数$w[X(\zeta)]$在Δ_1内是(Φ,ψ)准解析的，并且

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi,\psi)}{\mathrm{d}\zeta}w[X(\zeta)]=\dot{w}[X(\zeta)]X'(\zeta)$$

今设$\mathscr{R}$为黎曼曲面，以p、q、…表示其上的点；对于两函数$F(p)$、$G(p)$，如果在点p的每个邻域内存在属于p的一个局部参数z，而$F(z)$、$G(z)$形成一个生成对，那么$F(p)$、$G(p)$称为在$\mathscr{R}$内的函数，当它在D的每个点上是属于p的某一个局部参数的第一类(F,G)准解析函数时，称$w(p)$是第一类(F,G)准解析的。

导数概念在黎曼曲面上没有内在的意义。定义在一个区域$D\subset\mathscr{R}$的微分$\mathrm{d}W(p)$为一个规则，其与属于D的一点p_0的每个局部 参数相关联，但在邻域$N\subset D$内按以下方法定义一个函数表示

$f(p)=\dfrac{\mathrm{d}W(p)}{\mathrm{d}z^*(p)}$：若 $z^*(p)$ 为属于 p_0 的另一个局部参数，即当

$$f(p)\mathrm{d}p=f^*(p)\mathrm{d}z^*(p)$$

式中 $f^*(p)=\dfrac{\mathrm{d}W(p)}{\mathrm{d}z^*(p)}$，则

$$\frac{\mathrm{d}W(p)}{\mathrm{d}z(p)}=\frac{\mathrm{d}W(p)}{\mathrm{d}z^*(p)}\frac{\mathrm{d}z^*(p)}{\mathrm{d}z(p)}$$

进一步可以讨论上述微分是连续的、具有偏导数等，因为这些和用于计算 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$ 的局部参数的选择无关。类似地，如果 Γ 为 $\mathscr{X}$ 上的可求长曲线，那么积分 $\int_\Gamma \mathrm{d}W$ 有内在的意义。两个微分的商是一个函数，一个函数与一个微分的积是一个微分。对每个局部参数，共轭微分 $\mathrm{d}\overline{W}$ 是以形式

$$\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}=\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}^*}\frac{\mathrm{d}\bar{z}^*}{\mathrm{d}z}$$

和函数 $\dfrac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}$ 相联系的。

对局部参数的实部与虚部均有连续偏导数的每个函数 $w(p)$，有相关的微分 $w_z\mathrm{d}z$ 及共轭微分 $w_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$。尤其是若计算所用局部参数的 (F,G) 的特征系数，则 $a\mathrm{d}\bar{z}$、$b\mathrm{d}\bar{z}$ 都是共轭微分，$A\mathrm{d}z$、$B\mathrm{d}z$ 都是微分。

置表征 (F,G) 准解析函数的微分方程为

$$w_{\bar{z}}=aw+b\overline{w}$$

此方程具有内在的意义，这是由于若用另一个局部参数 z^* 来替代 z，则两边要乘以 $\overline{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z^*}}$。从 (F,G) 准解析函数 $w(z)$ 的 (F,G) 的导数可引入 (F,G) 准解析微分

$$\dot{w}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}w}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

或

$$\dot{w}\mathrm{d}z=(w_z-Aw-B\overline{w})\mathrm{d}z$$

微分 dW 是 (F,G) 准解析的当且仅当 $\dot{w}=\frac{dW}{dz}$ 有连续偏导数，且

$$\dot{w}_{\bar{z}}=a\dot{w}-B\overline{\dot{w}}$$

该方程内在的意义是：如果以 z^* 替换局部参数 z，那么 $\dot{w}_{\bar{z}}$、$a\dot{w}$、$B\overline{\dot{w}}$ 都应用 $\left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2$ 乘。一个等价的条件为：$\frac{dW}{dz}$ 连续同时对在 $\mathscr{X}$ 上同调于零的每条闭曲线 Γ，有

$$*\int_{\Gamma}\frac{dW}{dz}d_{(F,G)}z=0$$

由方程

$$*\int_{\Gamma}\frac{dW}{dz}d_{(F,G)}z=\mathrm{Re}\int\frac{2\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}dW-i\mathrm{Re}\int\frac{2\overline{F}}{F\overline{G}-\overline{F}G}dW$$

定义一个微分的 $(F,G)*$ 积分。

5 代数体函数

5.1 代数体函数第一基本定理

代数体函数是由不可约方程

$$\psi(z,w)=A_\nu(z)w^\nu+A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1}+\cdots+A_0(z)=0 \quad (5.1)$$

确定的ν值解析函数;式中$A_j(z)$为z的全纯函数并不在一点同时为零。当$\nu=1$时$w(z)$为亚纯函数,当$A_j(w)$均为多项式时$w(z)$是代数函数。一般情况下可考虑$\{A_j(z)\}$中至少有一个是超越函数的状况;另外,$j=0$、1、2、…、ν。

代数体函数是亚纯函数的推广,其研究内容之一是值分布问题。

设$w(z)$为ν值代数体函数。命在$z=z_0$点$w(z)$有λ个分支取$a(\neq\infty)$为值,且在z_0点邻域有表达式

$$w(z)=a+b_\tau(z-z_0)^{\frac{\tau}{\lambda}}+b_{\tau+1}(z-z_0)^{\frac{\tau+1}{\lambda}}+\cdots$$

置

$$n(r,a)=n\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=\sum_{w=a}\tau$$

上式求和为对位于$|z|<r$内$w-a$的零点而做,且τ重零点计算τ次。若在z_0点有λ个分支取为∞为值,并有展开式

$$w(z)=b_{-\tau}(z-z_0)^{-\frac{\tau}{\lambda}}+b_{-\tau+1}(z-z_0)^{\frac{-\tau+1}{\lambda}}+\cdots$$

则用

$$n(r,\infty)=n(r,w)=\sum_{w=\infty}\tau$$

表示$w(z)$的相应的极点个数。这里$z=z_0$在$w(z)$的黎曼曲面$\mathscr{R}$上的点为$\lambda-1$级分支点。令$\mathscr{X}(r)$表示$\mathscr{R}$中位于$|z|<r$上的ν叶曲面块,并以

$$n_{\mathscr{X}}(r,w)=\sum(\lambda-1)$$

表示$\mathscr{X}(r)$内分支点的个数,且按其分支级计算。

类似于亚纯函数Nevanlinna 理论中所用的记号，引入a 值点密指量和分支点密指量如下，当$a\neq\infty$时

$$N(r,a)=N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{\nu}n(0,a)\log r$$

当$a=\infty$时

$$N(r,\infty)=N(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\nu}n(0,w)\log r$$

及

$$N_{\mathscr{X}}(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{n_{\mathscr{X}}(t,w)-n_{\mathscr{X}}(0,w)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\nu}n_{\mathscr{X}}(0,w)\log r$$

注意其所用的密指量与Valiron 引进者相同，即当$a\in C$(复平面)时

$$n\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=n\left(r,\frac{1}{\psi(z,a)}\right)$$
$$N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=\frac{1}{\nu}N\left(r,\frac{1}{\psi(z,a)}\right)$$

对$a=0$，

$$N\left(r,\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{\nu}N\left(r,\frac{1}{A_0}\right)$$

对$a=\infty$

$$N(r,w)=\frac{1}{\nu}N\left(r,\frac{1}{A_\nu}\right)$$

对于$\nu=1$ 恒有$N_{\mathscr{X}}(r,w)=0$。

注意$\mathscr{R}$ 上$w(z)$的分支点在C 上的投影区为判别式的零点。今令$\mathscr{L}$ 为C 上连接这些点的曲线，在$C/\mathscr{L}$ 上以$w(z)$分离为ν 个单值分支$w_j(z)(j=1,2,\cdots,\nu)$。定义代数体函数的平均中值函数，当$a\in C$时

$$m(r,a)=\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}m\left(r,\frac{1}{w_j-a}\right)$$
$$=\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|w_j(re^{i\theta})-a|}\mathrm{d}\theta$$

当$a=\infty$时

$$m(r,w) = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} m(r,w_j)$$
$$= \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+ |w_j(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

称

$$T(r,w)=m(r,w)+N(r,w)$$

为$w(z)$的特征函数。

第一基本定理 若$w(z)$为式(5.1)确定的ν值代数体函数，则对$a\in C$，

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,w)+\frac{1}{\nu}\log\left|\frac{A_\nu(0)}{\psi(0,a)}\right|+\varepsilon(a,r) \tag{5.2}$$

其中$|\varepsilon(a,r)|\leqslant\log^+|a|+\log 2$。

证明:依

$$[w_1(z)-a][w_2(z)-a]\cdots[w_\nu(z)-a]=(-1)^\nu\frac{\psi(z,a)}{A_\nu(z)}$$

利用Jensen 公式，得

$$m(r,w-a)-m\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=\frac{1}{\nu}N\left(r,\frac{1}{\psi(z,a)}\right)$$
$$=\frac{1}{\nu}N\left(r,\frac{1}{A_\nu}\right)+\frac{1}{\nu}\log\left|\frac{\psi(0,a)}{A_\nu(0)}\right|$$

于是

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,w)+\varepsilon(a,r)+\frac{1}{\nu}\log\left|\frac{A_\nu(0)}{\psi(0,a)}\right|$$

式中$\varepsilon(a,r)=m(r,w-a)-m(r,w)$。注意到

$$\log^+|w_j-a|\leqslant\log^+|w_j(z)|+\log^+|a|+\log 2$$
$$\log^+|w_j(z)|\leqslant\log^+|w_j(z)-G|+\log^+|a|+\log 2$$

使

$$|\varepsilon(a,r)|\leqslant\log^+|a|+\log 2$$

一般而言，若$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，则

$$T\left(r,\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right)=T(r,w)+O(1) \tag{5.3}$$

定理5.1 若$w(z)$为式(5.1)确定的代数体函数，则

$$T(r,w)=\frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi}N\left[r,\frac{1}{\psi(z,e^{i\alpha})}\right]\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\log^+|w_j(0)| \tag{5.4}$$

证明：在

$$\psi(z,e^{i\alpha})=A_\nu(z)[e^{i\alpha}-w_1(z)][e^{i\alpha}-w_2(z)]\cdots[e^{i\alpha}-w_\nu(z)]$$

中对α从$0\sim2\pi$积分上式，应用

$$\log^+|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\varphi}-a|\mathrm{d}\varphi \tag{5.5}$$

推出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(z,e^{i\alpha})|\mathrm{d}\alpha=\log|A_\nu(z)|+\sum_{j=1}^{\nu}\log^+|w_j(z)| \tag{5.6}$$

取$z=re^{i\theta}$，对式(5.8)中的θ积分并交换积分顺序，由Jensen公式，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{\psi(z,e^{i\alpha})}\right)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|A_\nu(0)\prod_{j=1}^{\nu}[e^{i\alpha}-w_j(0)]\right|\mathrm{d}\alpha$$

$$=N\left(r,\frac{1}{A_\nu}\right)+\log|A_\nu(0)|+\sum_{j=1}^{\nu}m(r,w_j)$$

从而式(5.4)成立。

根据定理5.1可以得出下列论断：

(1) $T(r,w)$为$\log r$的凸增函数；

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}m(r,e^{i\alpha})\mathrm{d}\alpha\leqslant\log2$。

为方便讨论，对$z\in C$命$A(z)=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant\nu}\{|A_j(z)|\}$，记

$$\mu(r,A)=\frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi}\log A(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

定理5.2 若$w(z)$为式(5.1)确定的ν值代数体函数，则

$$\left|T(r,w)-\mu(r,A)+\frac{1}{\nu}\log|A_\nu(0)|\right|\leqslant\log2 \tag{5.7}$$

证明:因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(z,e^{i\alpha})|\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|A_\nu(z)e^{i\alpha\nu}+A_{\nu-1}(z)e^{i\alpha(\nu-1)}+\cdots+A_0(z)\right|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant\log\left[\sum_{j=0}^{\nu}|A_j(z)|\right]\leqslant\log A(z)+\log(\nu+1)$$

取$z=re^{i\theta}$并对上式θ积分,又利用式(5.4)知

$$T(r,w)+\frac{1}{\nu}\log|A_\nu(0)|\leqslant\mu(r,A)+\frac{1}{\nu}\log(1+\nu)$$

或

$$T(r,w)-\mu(r,A)+\frac{1}{\nu}\log|A_\nu(0)|\leqslant\log 2 \tag{5.8}$$

此外,依代数方程根与系数关系,有

$$\frac{A_j(z)}{A_\nu(z)}=\sum(-1)^\alpha w_{\alpha_1}(z)\cdots w_{\alpha_{\nu-1}}(z)$$

其中$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\nu-j})$为$(1,2,\cdots,\nu)$中取$\nu-j$个数的组合,$(-1)^\alpha$依赖于置换

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{\nu-j}\\ 1 & 2 & \cdots & \nu-j\end{pmatrix}$$

的奇偶性。对每个$z\in C$,令

$$\left|w_{\beta_1}(z)\cdots w_{\beta_{\nu-j}}(z)\right|=\max_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{\nu-j})}\left\{\left|w_{\alpha_1}(z)\cdots w_{\alpha_{\nu-j}}(z)\right|\right\}$$

于是

$$\log|A_j(z)|\leqslant\log|A_\nu(z)|+\log\left|w_{\beta_1}(z)\cdots w_{\beta_{\nu-j}}(z)\right|+\log C'_\nu$$

$$\leqslant\log|A_\nu(z)|+\sum_{j=1}^{\nu}\log^+|w_j(z)|+\nu\log 2$$

上式右边和j无关,故

$$\log A(z)\leqslant\log|A_\nu(z)|+\sum_{j=1}^{\nu}\log^+|w_j(z)|+\nu\log 2$$

对θ积分,使用Jensen公式,

$$\mu(r,A)\leqslant T(r,w)+\frac{1}{\nu}\log|A_\nu(0)|+\log 2 \tag{5.9}$$

结合式(5.8)、式(5.9)得到式(5.7)。

仿亚纯函数，对代数体函数引进相应的特征。代数体函数 $w(z)$ 为黎曼曲面上的单值亚纯函数，$w(\tilde{z})$ 为实现 $\mathscr{R}$ 到 $\hat{C}=C\cup\{\infty\}$ 上的保角映射。记

$$A(r,w)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|w'_j(re^{i\theta})|^2}{[1+|w_j(re^{i\theta})|^2]^2}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

称

$$\mathring{T}(r,A)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{A(t,w)}{t}\mathrm{d}t$$

为代数体函数的球面特征函数。显然

(1) $A(r,w)$ 的几何意义：若 W_r 表示 $w(\tilde{z})$ 将黎曼曲面块 $\mathscr{R}(r)$ 映于扩充的复平面 $\hat{C}_w$ 中的像域，F_r 为 W_r 通过测地线投影映于Neumann 球面的曲面块，则 $A(r,w)$ 表示 F_r 的球面面积除以总面积 π，其中曲面面积按映射的重数计算。

(2) $\mathring{T}(r,w)$ 为 $\log r$ 的凸增函数。

(3) $\mathring{T}(r,w)$ 和Nevanlinna 特征函数 $T(r,w)$ 仅相差一个有界量。计算知

$$|\mathring{T}(r,w)-T(r,w)|\leqslant\log 2+\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\log\sqrt{1+|w_j(0)|^2}$$

5.2 代数体函数的增长级

定义 5.1 若 $w(z)$ 为代数体函数，则

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,w)}{\log r}$$

$$\mu=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,w)}{\log r}$$

分别称为 $w(z)$ 的级和下级；若 $0<P<+\infty$，则

$$\sigma=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,w)}{r^{\rho}}$$

称为型。

因为$\mu(r,A)$和$\mathring{T}(r,w)$与$T(r,w)$仅相差一个有界量，所以定义5.1中能代$T(r,w)$以$\mu(r,A)$或$\mathring{T}(r,w)$。

定理5.3 如果$w(z)$为式(5.1)确定的代数体函数，其级为ρ；令ρ_j为式(5.1)系数$A_j(z)$的级，则

$$\rho_j \leqslant \rho \leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant \nu}\{\rho_j\} = \hat{\rho}$$

证明：第一，由$\mu(r,A)$的定义知

$$\nu\mu(r,A) \leqslant \sum_{j=1}^{\nu} m(r,A_j) + \log(\nu+1)$$

若$\hat{\rho}=\infty$，则$\rho\leqslant\hat{\rho}$。不妨取$\hat{\rho}<\infty$，这样对给定的$\varepsilon>0$，当$r\geqslant r_j$时

$$m(r,A_j)<r^{\rho_j}+\varepsilon$$

当$r>\hat{r}$时

$$\sum_{j=0}^{\nu} m(r,A_j) + \log(\nu+1) < r^{\hat{\rho}+\varepsilon}$$

据此，$\rho\leqslant\hat{\rho}+\varepsilon$。命$\varepsilon\to 0$，有$\rho\leqslant\hat{\rho}$。

第二，令$A_{jk}(z)=\max\{|A_j(z)|,|A_k(z)|\}$，得

$$\begin{aligned}
\gamma\mu(r,A) \geqslant \mu(r,A_{jk}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log A_{jk}(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{|A_j(re^{i\theta})|}{|A_k(re^{i\theta})|}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|A_k(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \\
&= m\left(r,\frac{A_j}{A_k}\right) + N\left(r,\frac{1}{A_k}\right) + \log|A_k(0)| \\
&\geqslant T(r,f_{jk}) + \log|A_k(0)| \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

式中$f_{jk}=\dfrac{A_j}{A_k}$；由此推出$f_{jk}(z)$的级$\rho_{jk}\leqslant\rho$。

但$f_{jk}(z)$的级$\rho_{jk}=\max\{\rho_j,\rho_k\}$，故$\rho_j\leqslant\rho_{jk}\leqslant\rho$。

从定理5.3知：当$w(z)$为代数体函数时，若

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,w)}{\log r}<\infty \qquad (5.11)$$

则$w(z)$为代数函数。

事实上，依式(5.10)，对任意j、$k\in[0,\nu]$，亚纯函数f_{jk}符合

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f_{jk})}{\log r}<\infty$$

应用亚纯函数的性质，所有 $f_{jk}(z)$ 为有理函数。注意到 $A_0(z)$、$A_1(z)$、…、$A_\nu(z)$不能具有非常数的公因子，因此必须一切 $A_j(z)$ $(j=0,1,2,\cdots,\nu)$为多项式，这时 $w(z)$退化为代数函数。

反之，若 $w(z)$为代数函数，则从 Valiron 特征即得式(5.11)。

定理5.4 若$w(z)$为式(5.1)确定的ν值代数体函数，则对$0<r<t<+\infty$有

$$m\left(r,\frac{w'}{w}\right)<10\log^+T(t,w)+12\log^+\frac{r}{t-r}+3\log^+\frac{1}{r}+\sigma_0 \tag{5.12}$$

其中σ_0 是仅与$A_j(z)(j=0,1,\cdots,\nu)$在原点的性质以及ν有关的量。

据定理5.4 知：

$$m\left(r,\frac{w^{(k)}}{w}\right)<\alpha_k\log^+T(t,w)+\beta_k\log\frac{t}{t-r}+\gamma_k\log^+\frac{1}{r}+\sigma_k \tag{5.13}$$

式中α_k、β_k、γ_k 为只和k、ν 有关的常数，σ_k 为仅与k、ν 及$A_j(z)$在原点的性质有关的常数。

证明：利用

$$m\left(r,\frac{w'}{w}\right)=\frac{1}{2\pi\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi}\log|w_j(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

$$<\log^+T(r+2h,w)+3\log^+\frac{r}{h}+2\log\frac{1}{r}+C \tag{5.14}$$

这里$h>0$,C 为仅和ν 以及$A_0(z)$、$A_\nu(z)$在原点性质有关的常数。假定对于$s=1,2,\cdots,k-1$, $|z|=r$ 下式成立

$$m\left(r,\frac{w^{(s)}}{w}\right)<\hat{\alpha}_s\log^+T(r+2h,w)+\hat{\beta}_s\log^+\frac{r}{h}+\hat{\gamma}_s\log^+\frac{1}{r}+\hat{\sigma}_s \tag{5.15}$$

其中 $\hat{\alpha}_s$、$\hat{\beta}_s$、$\hat{\gamma}_s$ 为只与ν、s 有关的常数，$\hat{\sigma}_s$ 为和s、ν 以及 $A_0(z)$、$A_\nu(z)$在原点性质有关的常数，于是当$s=k$ 时式(5.15)成立。因为对

$$\log w_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=h}\frac{\log w_j(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{5.16}$$

求k 阶(次)导数，并取$\zeta=z+he^{i\varphi}$，得

$$|[\log w_j(\zeta)]^{(k)}| \leqslant \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\log w_j(\zeta)|}{h^k}\mathrm{d}\varphi$$

$$< C_{\nu k}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{1}{h^k}\left[T(r+2h,w)+c+c'\log^+\frac{1}{r}\right] \qquad (5.17)$$

另外，

$$[\log w_j(\zeta)]^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}(\zeta)}{w_j(\zeta)} + P_k(\zeta)$$

$P_k(\zeta) = P_k\left(\frac{w'}{w}, \frac{w''}{w}, \cdots, \frac{w^{(k-1)}}{w}\right)$为其变量的常系数多项式。故

$$\left|\frac{w_j^{(k)}(\zeta)}{w_j(\zeta)}\right| \leqslant |[\log w_j(\zeta)]^{(k)}| + |P_k(\zeta)|$$

依归纳法假设和式(5.16)，再加上正对数的性质，

$$m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) < \hat{\alpha}_k \log^+ T(r+2h,w) + \hat{\beta}_k \log\frac{r}{h} + \hat{\gamma}_k \log^+\frac{1}{r} + \hat{\sigma}_k$$

上式只对特殊r值正确。一般情况下，根据

$$n(r,w^{(k)}) \leqslant \sum_{w=\infty}(\tau+k) + k\sum_{w=\infty}(\lambda-1) + (2k-1)\sum_{w\neq\infty}(\lambda-1)$$

$$\leqslant n(r,w) + k\bar{n}(r,w) + (2k-1)n_{\mathscr{X}}(r,w) \qquad (5.18)$$

式中$\bar{n}(r,a) = \bar{n}\left(r, \frac{1}{w-a}\right)$表示$|z|<r$内$w(z)$的判别$a$值点个数，而

$$n\left(\rho, \frac{w^{(k)}}{w}\right) \leqslant n\left(\rho, \frac{1}{w}\right) + n(\rho,w) + k\,\bar{n}(\rho,w) +$$

$$(2k-1)n\left(\rho, \frac{1}{J(z)}\right)$$

判别式 $J(z) = [A_\nu(z)]^{2(\nu-1)} \prod_{1\leqslant j<k\leqslant\nu} [w_j(z) - w_k(z)]^2$

这里$w_j(z)$、$w_k(z)$为$w(z)$的分支；应用定理5.4知式(5.13)成立。

容易证明：

(1) $m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) = O\{\log[rT(r,w)]\}$

于无穷级时可能须除去线测度为有穷的r值集；

(2) $T(r,w') = m(r,w') + N(r,w')$

$\leqslant m(r,w) + m\left(r, \frac{w'}{w}\right) + N(r,w') + O(1)$

$$\leqslant 2\nu T(r,w)+O\{\log[rT(r,w)]\} \tag{5.19}$$

5.3 代数体函数第二基本定理

第二基本定理 若$w(z)$为式(5.1)确定的ν值代数体函数,令$a_k(k=1,2,\cdots,p)$为p个判别复数(有穷或否),则

$$(p-2\nu)T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r,w)+S(r,w) \tag{5.20}$$

式中$N_1(r,w)$为重值点密指量,τ重值点计算$t-1$次,并且

$$S(r,w)=m\left(r,\frac{w'}{w}\right)+\sum_{k=1}^{p}m\left(r,\frac{w'}{w-a_k}\right)+O(1) \tag{5.21}$$

当$a_p=\infty$时式(5.21)p代以$p-1$。

证明:先设$a_k\in C$、$w_j=w_j(z)(j=1,2,\cdots,\nu)$为$w(z)$的$\nu$个分支,由恒等式

$$\prod_{j=1}^{\nu}\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{w_j-a_k}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}\sum\limits_{k=1}^{p}\left(A_k\,\dfrac{w_j'}{w_j-a_k}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}w_j'} \tag{5.22}$$

而$A_k=[(a_1-a_k)\cdots(a_{k-1}-a_k)(a_{k+1}-a_k)\cdots(a_p-a_k)]^{-1}$,

$w'(z)$为$w(z)$导数并设其满足

$\psi_1(z,w')=B_\nu(z)(w')^\nu+B_{\nu-1}(z)(w')^{\nu-1}+\cdots+B_0(\nu)=0$

取$z=re^{i\theta}$,使用Jensen公式,

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\prod_{k=1}^{p}\prod_{j=1}^{\nu}\frac{1}{w_j(z)-a_k}\right|\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\prod_{k=1}^{p}\frac{A_\nu(z)}{\psi(z,a_k)}\right|\mathrm{d}\theta=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{A_\nu(z)}{\psi(z,a_k)}\right|\mathrm{d}\theta\\&=pN\left(r,\frac{1}{A_\nu}\right)-\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\psi(z,a_k)}\right)+\\&\quad p\log|A_\nu(0)|-\sum_{k=1}^{p}\log|\psi(0,a_k)|\end{aligned}$$

从式(5.22)知

$$I=\sum_{j=1}^{\nu}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{w_j(z)-a_k}\right|-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{k=1}^{p}[w_j(z)-a_k]\right|\mathrm{d}\theta\right\}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|w_j'(z)|}\mathrm{d}\theta+\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{w_j'(z)}{w_j(z)-a_k}\right|\mathrm{d}\theta-$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\prod_{k=1}^{p}[w_j(z)-a_k]\right|\mathrm{d}\theta+O(1)$$

今对上式右边各项做进一步估计。因为

$$\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|w_j'(z)|}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\prod_{j=1}^{\nu}\frac{1}{w_j'(z)}\right|\mathrm{d}\theta+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|w_j'(z)|\mathrm{d}\theta$$

$$=N\left(r,\frac{1}{B_\nu}\right)-N\left(r,\frac{1}{B_0}\right)+\log\left|\frac{B_\nu(0)}{B_0(0)}\right|+\nu_m(r,w')$$

命 $a=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p}\{|a_k|\}$、$F_j(z)=[w_j(z)-a_1]\cdots[w_j(z)-a_p]$，

显见

$$|w_j(z)|^p\leqslant\begin{cases}2^p|F_j(z)| & \text{有 } z\in C \text{ 使 } |w_j(z)|>2a\\ 2^pa^p & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F_j(z)|\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|w_j(z)|\mathrm{d}\theta-p\log^+a-2p\log 2$$

推出

$$\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F_j(z)|\mathrm{d}\theta\geqslant p\nu m(r,w)$$

综合各式又利用第一基本定理，

$$pT(r,w)<T(r,w')+\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-$$

$$N\left(r,\frac{1}{w'}\right)+Q(r,w)\tag{5.23}$$

式中 $Q(r,w)=\sum_{k=1}^{p}m\left(r,\frac{w'}{w-a_k}\right)+O(1)$。又

$$T(r,w')\leqslant T(r,w)+N(r,w')-N(r,w)+m\left(r,\frac{w'}{w}\right)$$

得

$$(p-1)T(r,w)<N(r,w)+\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)$$
$$-N_1(r)+Q_1(r,w) \tag{5.24}$$

但

$$N_1(r)=2N(r,w)-N(r,w')+N\left(r,\frac{1}{w'}\right)$$
$$Q_1(r,w)=\sum_{k=0}^{p}m\left(r,\frac{w'}{w-a_k}\right)\quad(a_0=0)$$

因为$N(r,w)\leqslant T(r,w)$，所以式(5.24)可变成 $(p-2)T(r,w)<$
$$\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r)+Q_1(r,w) \tag{5.25}$$
式(5.25)中当$\{a_k\}$包括∞时也正确。实际上，在式(5.24)中取$a_{p+1}=\infty$，再以$p+1$替代p即有式(5.25)，而$a_p=\infty$且$Q_1(r,w)=\sum_{k=0}^{p-1}m\left(r,\frac{w'}{w-a_k}\right)$。

下面分析式(5.25)中的$N_1(r)$，注意到
$$N_1(r)=N_1(r,w)-N_{\mathscr{X}}(r,w) \tag{5.26}$$
这里$N_{\mathscr{X}}(r,w)$为分支密指量，$N_1(r,w)$为所有重值点(有穷或否)密指量，每个τ重值点被计算$\tau-1$次。因为如果在z_0点有λ个分支取$a\in C$为值，其重级为τ，那么依$w(z)-a=(z-z_0)^{\frac{\tau}{\lambda}}w_0(z)$、$w'(z)=(z-z_0)^{\frac{\tau-\lambda}{\lambda}}\hat{w}_0(z)$，得到当$\tau-\lambda>0$时$z_0$为$w'(z)$的$\tau-\lambda$重零点；当$\tau-\lambda<0$时$z_0$为$w'(z)$的$\lambda-\tau$重极点，所以

$$\begin{aligned}n_1(r)&=2n(r,w)-n(r,w')+n\left(r,\frac{1}{w'}\right)\\&=\sum(\tau-1)-\sum(\lambda-1)\\&=n_1(r,w)-n_{\mathscr{X}}(r,w)\end{aligned}$$

表明式(5.26)成立。结合式(5.26)、式(5.25)

$$(p-2)T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r,w)+N_{\mathscr{X}}(r,w)+Q_1(r,w) \tag{5.27}$$

再由下式

$$N_{\mathscr{X}}(r,w)\leqslant 2(\nu-1)T(r,w)+O(1) \tag{5.28}$$

知定理得证。

关于余项 $S(r,w)$，当 $w(z)$ 为有穷级时

$$S(r,w)=O(\log r) \qquad (r\to\infty) \tag{5.29}$$

当 $w(z)$ 为无穷级时

$$S(r,w)=O\{\log[rT(r,w)]\} \quad (r\to\infty) \tag{5.30}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r,w)\leqslant \sum_{k=1}^{p}\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)$$

$\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$ 表示判别的 a 值点密指量，这样式(5.20)可写成

$$(p-2\nu)T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+O\{\log[rT(r,w)]\} \tag{5.31}$$

在无穷级时可能须除去一个线测度为有穷的 r 值集 E。

当代数体函数 $w(z)$ 的分支点密指量满足

$$N_{\mathscr{X}}(r,w)=O[T(r,w)]$$

时，从式(5.25)知

$$[p-2-O(1)]T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r,w)+S(r,w) \tag{5.32}$$

定理5.5 若 $w(z)$ 为 ν 值代数体函数，并取 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 及 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为两组有穷异于零且每组内判明的复数，则

$$[p+q-6(\nu-1)]T(r,w)<(q+1)N\left(r,\frac{1}{w}\right)+2\overline{N}(r,w)+$$

$$\sum_{k=1}^{p} N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+\sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{w-b_j}\right)-\left[N\left(r,\frac{1}{w''}\right)+\right.$$

$$\left.N\left(r,\frac{1}{w'}\right)\right]+S_1(r,w)$$

其中$S_1(r,w)$具有余项的性质。

证明：对$w(z)$应用式(5.24)，$\{a_k\}(k=0,1,\cdots,p)$和$w'(z)$，$\{b_j\}(j=0,1,\cdots,q)$；设$a_0=b_0=0$，得

$$pT(r,w)<N(r,w)+\sum_{k=0}^{p} N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r)+Q_1(r,w) \tag{5.33}$$

及

$$qT(r,w')<\sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{w'-b_j}\right)+N(r,w'')-N(r,w')$$
$$-N\left(r,\frac{1}{w''}\right)+Q_1(r,w')$$

依Jensen公式

$$qT(r,w)=qT\left(r,\frac{1}{w}\right)+O(1)$$
$$\leqslant qT(r,w')+qN\left(r,\frac{1}{w}\right)-qN\left(r,\frac{1}{w'}\right)+qm\left(r,\frac{w'}{w}\right)+O(1)$$
$$\leqslant qN\left(r,\frac{1}{w}\right)+N(r,w'')+\sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{w'-b_j}\right)-$$
$$\left[(q-1)N\left(r,\frac{1}{w'}\right)+N(r,w')+N\left(r,\frac{1}{w''}\right)\right]+Q_2(r,w') \tag{5.34}$$

而

$$Q_2(r,w')=\sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{w''}{w'-b_j}\right)+2m\left(r,\frac{w''}{w'}\right)+qm\left(r,\frac{w'}{w}\right)+O(1)$$

式(5.34)加式(5.33)，

$$(p+q)T(r,w)<N(r,w'')+(q+1)N\left(r,\frac{1}{w}\right)+$$
$$\sum_{k=1}^{p} N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+\sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{w'-b_j}\right)-$$

$$\left[N(r,w)+N\left(r,\frac{1}{w''}\right)+qN\left(r,\frac{1}{w'}\right)\right]+Q_3(r,w)$$

式中$Q_3(r,w)=Q_2(r,w')+Q_1(r,w)$。利用

$$N(r,w^{(k)})\leqslant N(r,w)+k\,\overline{N}(r,w)+$$
$$2(\nu-1)(2k-1)T(r,w)+O(1) \qquad (5.35)$$

长化$N(r,w'')$，在$Q_3(r,w)$各项中用定理5.4，再结合式(5.19)可得出定理结论。

如果若$w(z)$、$\{a_j\}$、$\{b_j\}$符合定理5.5的条件，那么

$$[p+q-6(\nu-1)]T(r,w)<2\,\overline{N}(r,w)+N_\nu\left(r,\frac{1}{w'}\right)$$
$$+(q+1)N_\nu\left(r,\frac{1}{w}\right)+\sum_{j=1}^{p}N_\nu\left(r,\frac{1}{w-a_j}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{q}N_\nu\left(r,\frac{1}{w'-b_k}\right)+S_1(r,w) \qquad (5.36)$$

这里$S_1(r,w)$具有余项的性质，同时

$$N_\nu\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{n_\nu(t,a)-n_\nu(0,a)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\nu}n_\nu(0,a)\log r \qquad (5.37)$$

$n_\nu(r,a)$表示$w(z)-a$在$|z|<r$内的零点数，且其重级不大于ν时按重级计算，重级大于ν时只计算ν次。

5.4 代数体函数的亏量和亏值

定义5.2 设$w(z)$为C上ν值代数体函数，对于$a\in C$称

$$\delta(a)=\delta(a,w)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}$$

为$w(z)$关于a的亏量，当$\delta(a)>0$时称a为亏值；置

$$\theta(a)=\theta(a,w)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}$$

与

$$\Theta(a)=\Theta(a,w)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}$$

分别称为a的分支指标、分支量。

由定义和第一基本定理知

$0\leqslant\delta(a)\leqslant\delta(a)+\theta(a)$

$$\leqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\frac{1}{w-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}=\Theta(a)\leqslant 1$$

定理5.6 若$w(z)$为C上ν值代数体函数，则最多有可数多个$a\in\hat{C}$使$\Theta(a)>0$，并满足

$$\sum_{a\in\hat{C}}\Theta(a)\leqslant 2\nu \tag{5.38}$$

事实上，对$w(z)$应用式(5.31)，有

$$\sum_{k=1}^{p}\left[1-\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)}{T(r,w)}\right]\leqslant 2\nu+\frac{S(r,w)}{T(r,w)}$$

对上式取极限，

$$\sum_{k=1}^{p}\underline{\lim_{r\to\infty}}\left[1-\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)}{T(r,w)}\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left[1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)}{T(r,w)}\right]\leqslant 2\upsilon$$

表明$\Theta(a)>\frac{1}{p}$的a最多有$2\nu p$个，因此集合

$$A_p=\left\{a\,|\,a\in\hat{C},\frac{1}{p}\leqslant\Theta(a)<\frac{1}{p-1}\right\}$$

最多有$2\nu p$个元素。于是

$$A=\{a\,|\,a\in\hat{C},\Theta(a)>0\}=\bigcup_{p=1}^{\infty}A_p$$

最多有可数多个元素；在A中$\sum_{k=1}^{p}\Theta(a_k)\leqslant 2\upsilon$，即式(5.38)成立。

设γ为正整数，以$N^{\gamma^+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$表示$w(z)$的$a$值点密指量且其重级不大于$\gamma$。记

$$N^{\gamma^-}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)=N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)-N^{\gamma^+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$$

类似地，以$N_1^{\gamma^+}(r,a)$、$N_1^{\gamma^-}(r,a)$表示$w(z)$的重a值点密指量的相应量。因为

$$N_1^{\gamma^-}(r,a)\geqslant\frac{\gamma}{\gamma+1}N^{\gamma^-}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$$

有

$$N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)-N_1(r,a)\leqslant\frac{1}{\gamma+1}N\left(r,\frac{1}{w-a}\right)+\frac{\gamma}{\gamma+1}\overline{N}^{\gamma^+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$$
$$-\frac{1}{\gamma+1}N_1^{\gamma+1}(r,a)\leqslant\frac{1}{\gamma+1}T(r,w)+\frac{\gamma}{\gamma+1}\overline{N}^{\gamma+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$$
$$-\frac{1}{\gamma+1}N_1^{\gamma^+}(r,a)+O(1)$$

其中$\overline{N}^{\gamma^+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$表示重级不大于$\gamma$的$w(z)$的判别的$a$值点密指量。今设$\gamma_k(k=1,2,\cdots,p)$为正整数，则式(5.20)成为

$$(p-2\nu)T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}\left[N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)-N_1(r,a_k)\right]+S(r,w)$$
$$\leqslant T(r,w)\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1+\gamma_k}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}\overline{N}^{\gamma_k^+}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+S(r,w)$$

或

$$T(r,w)\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}-2\upsilon\right)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}\overline{N}^{\gamma_k^+}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+S(r,w)\tag{5.39}$$

定理5.7 设$w(z)$为υ值代数体函数，若

$$\Theta_{\gamma^+}(a)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}^{\gamma^+}\left(r,\frac{1}{w-a}\right)}{T(r,w)}$$

则

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\gamma_k}{\gamma_k + 1} \Theta_{\gamma_k^+}(a_k) \leqslant 2\nu \tag{5.40}$$

定义 5.3 若 $\dot{\Theta}_{\gamma+}(a)=1$，则称 a 为 $w(z)$ 的 γ 级简约满亏值。

定理5.8 设 $w(z)$ 为单位圆内的 ν 值代数体函数，若当 $r \to 1$ 时

$$\frac{T(r,w)}{\log \frac{1}{1-r}} \to \infty$$

则对所有 $a \in \hat{C}$ 有 $\Theta_{\gamma^+}(a)=0$，最多除去一个可数值集 $\{a\}$，使当 $\Theta_{\gamma^+}(a)>0$ 时符合

$$\sum \Theta_{\gamma^+}(a) \leqslant \frac{2\nu(\gamma+1)}{\gamma}$$

反之，若

$$\sum \Theta_{\gamma}(a) \geqslant \Omega > \frac{2\nu(\gamma+1)}{\gamma}$$

则

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{T(r,w)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqslant \frac{\gamma+1}{\gamma\Omega - 2\nu(\gamma+1)}$$

定理 5.9 设 $w(z)$ 为 ν 值代数体函数。若 $w(z)$ 的每个 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 值点的重级不小于 τ_k，则

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\tau_k} \geqslant p - 2\nu \tag{5.41}$$

当所有 $\tau_k \geqslant 2$ 时 $p \leqslant 4\nu$。

证明：从式(5.31)出发，

$$\sum_{k=1}^{p} \left[1 - \frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{w-a_k}\right)}{T(r,w)} \right] < 2\nu + \frac{O\{\log[rT(r,w)]\}}{T(r,w)}$$

根据第一基本定理，上式变为

$$\sum_{k=1}^{p} \left[1 - \frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{w-a_k}\right)}{[1+O(1)]N\left(r, \frac{1}{w-a_k}\right)} \right] < 2\nu + \frac{O\{\log[rT(r,w)]\}}{T(r,w)}$$

由假设，

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)\leqslant\frac{1}{\tau_k}N\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)$$

这样

$$\sum_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{\tau_k}\right)\leqslant 2\nu$$

如果$g_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$为p个超越整函数，满足

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j g_j(z)=1 \qquad \sum_{j=1}^{p}|\alpha_j|\neq 0 \tag{5.42}$$

那么

$$\sum_{j=1}^{p}\delta(0,g_j)\leqslant p-1 \tag{5.43}$$

其中

$$\delta(0,g_j)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{g_j}\right)}{m(r,g_j)}$$

定理5.10 若$w(z)$为式(5.1)确定的ν值代数体函数，并以a_j $(j=1,2,\cdots,\nu+1)$为亏值，则其下级为正。

证明：设$a_j\in C$、$a_{\nu+1}\in\hat{C}$，令

$$\psi(z,a_j)=A_\nu(z)a_j^\nu+A_{\nu-1}(z)a_j^{\nu-1}+\cdots+A_0(z)=g_j(z)$$

当$a_{\nu+1}=\infty$时$g_{\nu+1}(z)=A_\nu(z)$。取$z=re^{i\theta}$、$\zeta=Re^{i\varphi}$、$R=\sigma r(\sigma>1)$，利用Poisson－Jensen公式于$\frac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}$，

$$\log\left|\frac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{g_j(\zeta)}{g_{\nu+1}(\zeta)}\right|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$+\sum\log\left|\frac{R^2-\overline{\beta}_k^{(j)}z}{R(z-\beta_k^{(j)})}\right|-\sum\log\left|\frac{R^2-\overline{\alpha}_l^{(j)}z}{R(z-\overline{\alpha}_k^{(j)})}\right|$$

其中$\{\alpha_l^{(j)}\}$、$\{\beta_k^{(j)}\}$分别为$\frac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}$在圆$|z|<R$内的零点、极点。因为

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)=1+\mathrm{Re}\left(\frac{2z}{\zeta-z}\right)$$

所以上式能长化为

$$\log\left|\frac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{g_j(\zeta)}{g_{\nu+1}(\zeta)}\right|\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{(\sigma-1)\pi}\cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{g_j(\zeta)}{g_{\nu+1}(\zeta)}\right|\mathrm{d}\varphi +$$

$$\sum\log\left|\frac{R^2-\overline{\beta}_k^{(j)}z}{R(z-\beta_k^{(j)})}\right| \tag{5.44}$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{g_j(\zeta)}{g_{\nu+1}(\zeta)}\right|\mathrm{d}\varphi = N\left(R,\frac{1}{g_j}\right) - N\left(R,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right) + O(1)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{g_j(\zeta)}{g_{\nu+1}(\zeta)}\right|\right|\mathrm{d}\varphi = m\left(R,\frac{g_j}{g_{\nu+1}}\right) + m\left(R,\frac{g_{\nu+1}}{g_j}\right)$$

$$\leqslant 2T\left(R,\frac{g_j}{g_{\nu+1}}\right) + O(1)$$

注意到$\dfrac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}$的极点$\{\beta_k^{(j)}\}$包括在$g_{\nu+1}(z)$的零点集$\{\beta_k\}$之中，于是式(5.44)变为

$$\log\left|\frac{g_j(z)}{g_{\nu+1}(z)}\right| \leqslant N\left(R,\frac{1}{g_j}\right) - N\left(R,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right) + \frac{4}{\sigma-1}T\left(R,\frac{g_j}{g_{\nu+1}}\right) +$$

$$\sum_{|\beta_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\overline{\beta}_k z}{R(z-\beta_k)}\right| + O(1)$$

对每个$z\in C$，置

$$g(z) = \max_{1\leqslant j\leqslant \nu+1}\{|g_j(z)|\}$$

$$G_{\nu+1}^j(z) = \max\{|g_j(z)|,|g_{\nu+1}(z)|\}$$

又记

$$\mu(r,g) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi}\log g(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$\mu(r,G_{\nu+1}^j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log G_{\nu+1}^j(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

而

$$T\left(r,\frac{g_j}{g_{\nu+1}}\right) = \mu(r,G_{\nu+1}^j) + O(1) \leqslant \nu\mu(r,g) + O(1),$$

有

$$\log g(z)-\log|g_{\nu+1}(z)|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant\nu+1}\left\{N\left(R,\frac{1}{g_j}\right)-N\left(R,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right)+\right.$$

$$\frac{4\nu}{\sigma-1}\mu(R,g)+\sum_{|\beta_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\overline{\beta}_k z}{R(z-\beta_k)}\right|+O(1)$$

命 $z=re^{i\theta}$，对上式求积分，并计及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g_{\nu+1}(z)|\mathrm{d}\theta=N\left(r,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right)+O(1)$$

与

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{|\beta_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\overline{\beta}_k z}{R(z-\beta_k)}\right|\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{x}{y}\right|\mathrm{d}\theta$$

$$=N\left(R,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right)-N\left(r,\frac{1}{g_{\nu+1}}\right)$$

式中

$$\begin{cases}x=\prod_{|\beta_k|<R}\dfrac{R^2-\overline{\beta}_k z}{R(z-\beta_k)}\\ y=\prod_{|\beta_k|<r}\dfrac{R^2-\overline{\beta}_k z}{R(z-\beta_k)}\end{cases}$$

推出

$$\mu(r,g)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant\nu+1}\left\{\frac{1}{\nu}N\left(R,\frac{1}{g_j}\right)\right\}+\frac{4}{\sigma-1}\mu(R,g)+O(1)$$

令 $\gamma=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant\nu+1}\{1-\delta(a_j,w)\}<1$，取 c'、c 符合 $\gamma<c'<c<1$，注意到

$$\mu(r,g)=\mu(r,A)+O(1)=T(r,w)+O(1)$$

当 $R\geqslant r_0$ 时，

$$\frac{1}{\nu}N\left(R,\frac{1}{g_j}\right)<c'T(R,w)=c'\mu(R,g)+O(1)$$

结果

$$\mu(r,g)<\left(\frac{4}{\sigma-1}+c\right)\mu(R,g)$$

而 $\sigma=1+\dfrac{4}{c(1-c)}$，得

$$\mu(\sigma^m r_0,g)>\frac{1}{c(2-c)}\mu(\sigma^m r_0,g)>\cdots>\left[\frac{1}{c(2-c)}\right]^m\mu(r_0,g)$$

对任意$r\geqslant r_0$，存在m使$\sigma^m r_0\leqslant r<\sigma^{m+1}r_0$，这样

$$\frac{\log\mu(r,g)}{\log r}>\frac{\log\mu(\sigma^m r_0,g)}{\log(\sigma^{m+1}r_0)}>\frac{m\log\dfrac{1}{c(2-c)}+\log\mu(r_0,g)}{(m+1)\log\sigma+\log r_0}$$

从而

$$\mu=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,w)}{\log r}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log\mu(r,g)}{\log r}\geqslant\frac{\log\dfrac{1}{c(2-c)}}{\log\sigma}$$

当$c\to\gamma$时，

$$\mu\geqslant\frac{\log\dfrac{1}{\gamma(2-\gamma)}}{\log\left[1+\dfrac{1}{\gamma(1-\gamma)}\right]}>0$$

如果$w(z)$具有$\nu+1$个满亏值，那么$w(z)$的级或是整数或是无穷。

5.5 代数体函数的唯一性问题

设$w(z)$、$\hat{w}(z)$分别由式(5.1)与下式

$$\Phi(z,\hat{w})=B_\mu(z)\hat{w}^\mu+B_{\mu-1}(z)\hat{w}^{\mu-1}+\cdots+B_0(z)\tag{5.45}$$

确定。不失一般性，取$\mu\leqslant\nu$，以$\overline{n}_0(r,a)$表示$w(z)=a$和$\hat{w}(z)=a$在圆$|z|<r$内公共值点数，且每个值点只计算一次。仍命

$$\overline{N}_0(r,a)=\frac{\mu+\nu}{2\mu\nu}\int_0^r\frac{\overline{n}_0(t,a)-\overline{n}_0(0,a)}{t}\mathrm{d}t+\frac{\mu+\nu}{2\mu\nu}\overline{n}_0(0,a)\log r$$

和

$$\overline{N}_{12}(r,a)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{\hat{w}-a}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\hat{w}-a}\right)-2\overline{N}_0(r,a)$$

定理5.11 设$w(z)$、$\hat{w}(z)$分别为ν值、μ值代数体函数且$\mu\leqslant\nu$。若对$4\nu+1$个$a_j\in\hat{C}(j=1,2,\cdots,4\nu+1)$函数$w(z)$、$\hat{w}(z)$有相同的$a_j$值点，但不计其重级，则$w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$。

证明：应用第二基本定理于$w(z)$、$\hat{w}(z)$和a_j当$p=4\nu+1$时

$$(p-2\nu)T(r,w)<\sum_{j=1}^{p}\overline{N}\left(r,\frac{1}{w-a_j}\right)+S(r,w)$$

$$(p-2\mu)T(r,\hat{w})<\sum_{j=1}^{p}\overline{N}\left(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j}\right)+S(r,\hat{w})$$

两式相加，并采用上面的记号又计及$\mu\leqslant\upsilon_1$，得

$$(p-2\upsilon)[T(r,w)+T(r,\hat{w})]<\sum_{j=1}^{p}\overline{N}_{12}(r,a_j)$$

$$+2\sum_{j=1}^{p}\overline{N}_0(r,a_j)+O\{\log[rT(r,w)T(r,\hat{w})]\} \tag{5.46}$$

当$w(z)$、$\hat{w}(z)$之一为无穷级时，可能须除去一列长为有穷的区间序列。

若$w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$，则

$$\sum\bar{n}_0(r,a)<n\left(r,\frac{1}{R(\psi,\Phi)}\right)$$

式中$R(\psi,\Phi)$为$\psi(z,w)$和$\Phi(z,\hat{w})$的结式，即

$$R(\psi,\Phi)=[A_\nu(z)]^\mu[B_\mu(z)]^\nu\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant\nu\\1\leqslant k\leqslant\mu}}[w_j(z)-\hat{w}_k(z)]$$

依 Jensen 公式

$$N\left(r,\frac{1}{R(\psi,\Phi)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|R(\psi,\Phi)|\mathrm{d}\theta+\log\left|\frac{1}{R(\psi,\Phi)}\right|_{z=0}$$

$$=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|A_\nu(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|B_\mu(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant\nu\\1\leqslant k\leqslant\mu}}[w_j(re^{i\theta})-\hat{w}_k(re^{i\theta})]\right|\mathrm{d}\theta+O(1)$$

$$\leqslant\mu\upsilon[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1)$$

导出

$$\sum\overline{N}_0(r,a)\leqslant\frac{2\mu\nu}{\mu+\nu}[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1)$$

$$\leqslant\nu[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1)$$

把上式代数式(5.46)，有

$$(p-4\nu)[T(r,w)+T(r,\hat{w})]<\sum_{j=1}^{p}\overline{N}_{12}(r,a_j)$$

$$+O\{\log[rT(r,w)T(r,w)]\} \tag{5.47}$$

由假定，$w(z)$、$\hat{w}(z)$对于$4\nu+1$个$a_j\in\hat{C}$具有相同的值点(不计其重级)，这时对如a_j值有$\overline{N}_{12}(r,a_j)=0$；这样式(5.47)变为

$$T(r,w)+T(r,\hat{w})<O\{\log[rT(r,w)T(r,w)]\}$$

这里考虑超越代数体函数，故上式不成立，表明

$$w(z)\equiv\hat{w}(z)。$$

令 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$，而 $p\geqslant 2$ 且 $a_j\in C$；又 $G(z)=G(g_1(z),g_2(z),\cdots,g_p(z))$，其中 $\{g_j(z)\}$ 是线性无关的整函数。对每个 $z\in C$，定义

$$g(z)=\max_{1\leqslant j\leqslant p}\{|g_j(z)\}$$

记

$$T(r,G)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log g(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta-\log g(0)$$

定义 5.4 设 $\overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}=\{a_1^{(k)},\cdots,a_p^{(k)}\}$ 且 $k=1,2,\cdots,q(\geqslant p)$，若 $\{\boldsymbol{a}^{(k)}\}$ 中任意 p 个向量均线性无关，则称 $\{\boldsymbol{a}^{(k)}\}$ 为允许向量组。设 $F_k(z)=G(z)\boldsymbol{a}^{(k)}=\sum_{j=1}^{p}a_j^{(k)}g_j(z)$，若 $\{\boldsymbol{a}^{(k)}\}$ 为允许向量组，则称 $\{F_k(z)\}$ 为允许线性组合。

用 $n(r,\boldsymbol{a})$ 表示 $G(z)\boldsymbol{a}=\sum_{j=1}^{p}a_jg_j(z)$ 在 $|z|<r$ 内零点数，并按其重级计算；用 $n_{p-\gamma}(r,\boldsymbol{a})$ 表示 $G(z)\boldsymbol{a}$ 的零点数，并当重级不大于 $p-\gamma$ 时按重级计算，否则只计算 $p-\gamma$ 次。取 $\overline{n}_1(r,\boldsymbol{a})=n(r,\boldsymbol{a})-n_{p-1}(r,\boldsymbol{a})$，相应地定义密指量：

$$\begin{aligned}&N_{p-\gamma}(r,\boldsymbol{a})=N_{p-1}(r,G\boldsymbol{a}=0)\\&=\int_0^r\frac{n_{p-\gamma}(t,\boldsymbol{a})-n_{p-\gamma}(\sigma,\boldsymbol{a})}{t}\mathrm{d}t+n_{p-\gamma}(0,\boldsymbol{a})\log r\end{aligned}$$

定义5.5 设 $w(z)$ 为式(5.1)确定的 ν 值代数体函数。如果 $A_\nu(z)$、$A_{\nu-1}(z)$、…、$A_0(z)$ 线性无关，那么称 $w(z)$ 为一般型代数体函数。

定理5.12 若 $w(z)$ 为 ν 值一般型代数体函数，$a_k\in C$ 且 $k=1$、2、…、q 为 $q(>\nu+1)$ 个判别的复数，则

$$(q-\nu-1)T(r,w)<\sum_{k=1}^{q}N_\nu\left(r,\frac{1}{w-a_k}\right)+S(r,w)\tag{5.48}$$

式中 $S(r,w)$ 具有余项的性质。

6 无穷维空间函数的积分

6.1 可测函数

6.1.1 弱可测与强可测

定义6.1 设向量函数$x(\alpha)$、$x_n(\alpha)\in E$(巴拿赫空间)且$\alpha\in[0,1]$。于是：

(1) $x_n(\alpha)$称作几乎处处收敛于$x(\alpha)$，如果存在零测度$S_0\in[0,1]$使$\alpha\in[0,1]\backslash S$。当$n\to\infty$时范数$\|x_n(\alpha)-x(\alpha)\|\to 0$；

(2) $x_n(\alpha)$称作测度收敛于$x(\alpha)$，如果对每个$\varepsilon>0$，当$n\to\infty$时均有外测度$mE(\|x(\alpha)-x_n(\alpha)\|)\geqslant\varepsilon\to 0$。

定理6.1 若$x_n(\alpha)$几乎处处收敛于$x(\alpha)$，则$x_n(\alpha)$必测度收敛于$x(\alpha)$。

定义6.2 (1) $x(\alpha)$称为有限值的，如果其在不相交的可测集合S_i上取常量，S_i满足$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i=[0,1]$且当$i\neq j$时$S_i\neq S_j$；

(2) $x(\alpha)$称为可列值的，如果$x(\alpha)$在任意可测集$S\in[0,1]$最多取可列个值在巴拿赫空间E。

定义6.3 $x(\alpha)$称为可析值的，如果其值域$x([0,1])=R$(距离空间)是可析的；$x(\alpha)$称为几乎可析的，如果存在零测集$S_0\in[0,1]$使$x([0,1]\backslash S_0)$是可析的。

定义6.4 (1) $x(\alpha)$称作弱可测，如果任意线性泛函数$f\in\overline{E}$(E的共轭空间)，使$f[x(\alpha)]$在$[0,1]$为勒贝格可测；(2) $x(\alpha)$称作强可测，如果存在函数到$x_n(\alpha)$，每个$x_n(\alpha)$在巴拿赫空间E中取可列值的，$x_n(\alpha)$在$[0,1]$几乎处处收敛于$x(\alpha)$。

定理6.2 当且仅当$x(\alpha)$弱可测及几乎取可析的时$x(\alpha)$在$[0,1]$强可测。

证明：必要性。若$x(\alpha)$强可测，则存在零集合S_0以及序列

$\{x_n(\alpha)\}$为可列值的函数。对任意 $\alpha\in[0,1]\setminus S_0$，当 $n\to\infty$ 时 $\|x_n(\alpha)-x(\alpha)\|\to 0$。若$\varphi\in\overline{E}$为任意线性泛函数，则当$\alpha\in[0,1]\setminus S_0$ 时 $|\varphi(x(\alpha))-\varphi(x_n(\alpha))|\to 0$，此 $\varphi(x_n(\alpha))$最多取可列个不同的值，每个值取在可测集上，表明勒贝格可测。由于$\varphi(x(\alpha))$为可测函数的极限，因此$\varphi(x(\alpha))$也可测。

充分性。不失一般性，设$x(\alpha)$是可析的。这样存在一元到$x_n=x(\alpha_n)$稠密于 $x([0,1])$。命 $\varphi_n\in\overline{E}$为序列线性泛函数并满足 $|\varphi_n(x_n)|=\|x_n\|$、$\|\varphi_n\|=1$，由 $\varphi_n(x(\alpha))$可测知$|\varphi_n(x(\alpha))|$也可测。取

$f(\alpha)=\sup\limits_n|\varphi_n(x(\alpha))|$，推知$f(\alpha)$可测。$f(\alpha)\leqslant\|x(\alpha)\|$对所有$\alpha$成立；但当$\alpha=\alpha_n$ 时 $f(\alpha_n)=\|x(\alpha_n)\|$。当$\alpha\neq\alpha_n$ 时对任意$\varepsilon>0$，存在n使$\|x(\alpha_n)\|>\|x(\alpha)\|-\varepsilon$。于是

$$f(\alpha)\geqslant|\varphi_n(x(\alpha))|\geqslant|\varphi_n(x(\alpha_n))|-$$
$$|\varphi_n(x(\alpha)-x(\alpha))|>\|x(\alpha)\|-2\varepsilon$$

故 $f(\alpha)=\|x(\alpha)\|$，$\|x(\alpha)\|$可测。

依前段证明知$\|x(\alpha)-x_n\|$也可测。置

$$S_{mn}=\mathop{E}_{\alpha\in[0,1]}\left\{\|x(\alpha)-x_n\|<\frac{1}{m}\right\}\qquad(m\text{ 为正整数})$$

这样S_{mn}为可测集，$S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_{mn}=[0,1]$。

令 $S'_{m1}=S_{m1}$、$S'_{mn}=S_{mn}\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}S'_{mj}$，当$n>1$ 时S'_{mn}互不相交，其和为S。定义

$$x_m(\alpha)=x_n$$

$\alpha\in S'_{mn}(m、n=1,2,\cdots)$。$\{x_m(\alpha)\}$为可列值的函数组

$$\|x(\alpha)-x_m(\alpha)\|<\frac{1}{m}$$

对任意m、α成立，表明$x(\alpha)$为可列值的函数的一致极限，即强可测。

从定理6.2知：若$x(\alpha)$可析，则强可测等价于弱可测。

强可测函数具有一般勒贝格可测函数的性质：

(1) 若 $x(\alpha)$、$y(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 强可测，则对常数 a_1、a_2 有 $a_1x(\alpha)+a_2y(\alpha)$ 也强可测；

(2) 若 $f(\alpha)$ 为在 $[0,1]$ 上可测的实函数，则当 $x(\alpha)$ 强可测时 $f(\alpha)x(\alpha)$ 也强可测；

(3) 若 $x(\alpha)$ 为一序列强可测函数的几乎处处的极限，则 $x(\alpha)$ 也强可测；

(4) 在(3)中的"极限"可换为弱极限，结果也成立；

(5) 若 $x_n(\alpha)$ 测度收敛于 $x(\alpha)$，则 $x(\alpha)$ 也可测。

6.1.2 *P*-积分和*B*-积分

定义 6.5 若函数从 $[0,1]$ 映射到巴拿赫空间 E，则称 $x(\alpha)$ 为可积的，当且仅当存在一元 $x_0\in E$ 使对任意泛函数 $f\in\overline{E}$ 有

$$\int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha = f(x_0)$$

左边指勒贝格积分，依定义，得

$$(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = x_0$$

从 *P*-积分定义知，可积函数为弱可测。

定理 6.3 积分是唯一定义的。

事实上，设 $(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = x_0^{(1)}$、$(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = x_0^{(2)}$ 同时成立；由定义知 $f(x_0^{(1)})=f(x_0^{(2)})$ 对任意泛函数 $f\in\overline{E}$ 成立，利用巴拿赫定理推出 $x_0^{(1)}=x_0^{(2)}$。

定理 6.4 $(P)\int_0^1[a_1x_1(\alpha)+a_2x_2(\alpha)]\mathrm{d}\alpha$

$$= a_1(P)\int_0^1 x_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha + a_2(P)\int_0^1 x_2(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

证明：由定义，对任意 $f\in\overline{E}$ 得

$$\int_0^1 f[a_1x_1(\alpha)+a_2x_2(\alpha)]\mathrm{d}\alpha = a_1\int_0^1 f(x_1(\alpha))\mathrm{d}\alpha +$$

$$a_2\int_0^1 f(x_2(\alpha))\mathrm{d}\alpha$$

即有

$$(P)\int_0^1[a_1x_1(\alpha)+a_2x_2(\alpha)]\mathrm{d}\alpha=a_1(P)\int_0^1 x_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha+a_2(P)\int_0^1 x_2(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

定理6.5 称取有限或可列值的函数为简单函数。简单函数是可积的，且

$$(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{j=1}^{n}x_j m(S_j)$$

当 $x(\alpha)=x_j(\alpha\in S_j)$ 时 $\bigcup_{j=1}^{n}S_j=[0,1]$，此 S_j 可测。

证明：设[0,1]分解为有限个可测集的和。

$$[0,1]=\bigcup_{j=1}^{n}S_j \qquad (n\text{ 为有限或无限})$$

$$x(\alpha)=x_j \quad (\alpha\in S_j)$$

这样 $f(x(\alpha))=f(x_j)$，当 $\alpha\in S_j$ 时

$$\int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)m(S_j)=f\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j m(S_j)\Big)$$

取 $x_0=\sum_{j=1}^{n}x_j m(S_j)\in E$，有

$$\int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha=f(x_0)$$

即

$$(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha=x_0=\sum_{j=1}^{n}x_j m(S_j)$$

定理6.6 若 $x_n(\alpha)$ 为弱有界、可测向量函数，弱收敛于 $x(\alpha)$，则 $x(\alpha)$ 也为弱有界、可测函数；或，对任意 $f\in\overline{E}$，得

$$f(x_n(\alpha))\rightarrow f(x(\alpha))$$

又命 $(p)\int_0^1 x_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha=x_{n0}$、$(p)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha=x_0$，故极限 $x_{n0}\xrightarrow{\text{弱}}x_0$ 是唯一的。

定理6.7 设 T 为定义在巴拿赫空间 E 上的线性有界运算，其

值域为巴拿赫空间 E_1。若 $x(\alpha)\subset E$、$\alpha\in[0,1]$为 P-可积函数，则 $T[x(\alpha)]$也是 P-可积，当 $(P)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = x_0$ 时

$$(P)\int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha = T[x_0]$$

证明：设 T 将 E 变到 E_1、$\varphi\in\overline{E}_1$，有

$$\varphi\{T[x(\alpha)]\}=f(x(\alpha)) \qquad (f\in\overline{E})$$

及存在 T 的共轭运算 $f=T^*\varphi$，对任意 x，

$$\varphi(T[x])=f(x)$$

注意到

$$\int_0^1\varphi\{T[x(\alpha)]\}\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha = f(x_0) = \varphi\{T[x_0]\}$$

得

$$(P)\int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha = T[x_0]$$

定义 6.6 若可列值向量函数 $x(\alpha)$从$[0,1]$变到巴拿赫空间 E，则称 $x(\alpha)$是可积的，当且仅当 $\| x(\alpha) \|$ 勒贝格可积。依定义，

$$(B)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} x_i m(S_i)$$

其中 S_i 为可测集，$x(\alpha)=x_i(\alpha\in S_i)$，$[0,1]=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$、$S_i\cap S_j=\varnothing$ $(i\neq j)$。

因为 $\int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \| x_j \| m(S_j)$，所以

$$\left\| (B)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right\| \leqslant \int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$$

对任意 $f\in\overline{E}$，

$$\int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j)m(S_j)$$

由上式知对可列值函数而言，P-积分等价于 B-积分。

定义 6.7 若函数 $x(\alpha)$从$[0,1]$变到巴拿赫空间 E，则称 $x(\alpha)$为 B-可积，当且仅当存在可列值函数列$\{x_n(\alpha)\}$几乎处处收敛于

$x(\alpha)$，且满足

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^1 \| x_m(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha = 0$$

依定义

$$(B)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \lim_{n\to\infty}(B)\int_0^1 x_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

定理6.8 由定义的条件可推出积分的存在，且是唯一存在的。

证明：(1) 存在性。

$$\left\| (B)\int_0^1 x_m(\alpha)\mathrm{d}\alpha - (B)\int_0^1 x_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right\|$$

$$\leqslant \left\| (B)\int_0^1 [x_m(\alpha) - x_n(\alpha)]\mathrm{d}\alpha \right\| \leqslant \int_0^1 \| x_m(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$$

于是 $x_n = \int_0^1 x_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 为柯西基本收敛列。因为E 是完备空间，所以极限存在，记作 $(B)\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 。

(2) 唯一性。命

$$x_n = (B)\int_0^1 x_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

由定理6.7 知对任意 $f\in\overline{E}$，

$$f(x_n) = \int_0^1 f(x_n(\alpha))\mathrm{d}\alpha \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

又

$$\int_0^1 |f(x_n(\alpha)) - f(x_m(\alpha))|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant \int_0^1 \| f \| \, \| x_n(\alpha) - x_m(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha \leqslant \| f \| \int_0^1 \| x_n(\alpha) - x_m(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$$

这时

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^1 |f(x_n(\alpha)) - f(x_m(\alpha))|\mathrm{d}\alpha$$

因为 $f(x_n(\alpha))$ 几乎处处收敛于 $f(x(\alpha))$，所以

$$\int_0^1 f(x(\alpha))\mathrm{d}\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x_n(\alpha))\mathrm{d}\alpha$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x_n(\alpha))\mathrm{d}\alpha$$

另设$\{y_n(\alpha)\}$几乎处处收敛于$x(\alpha)$，得

$$y_n = \int_0^1 y_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

而$f(y)=f(x)$对任意$f\in\overline{E}$成立。足见$x=y$，即极限是唯一的。

定理6.9 向量函数$x(\alpha)\in E$且$\alpha\in[0,1]$为B-可积的充要条件是$x(\alpha)$强可测，而$\int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha < \infty$。

证明：设$x(\alpha)$可积，则存在可列值函数列$x_n(\alpha)$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\alpha) = x(\alpha)$$

几乎处处成立，表明$x(\alpha)$强可测。又

$$\int_0^1 \big| \| x_m(\alpha) \| - \| x_n(\alpha) \| \big| \mathrm{d}\alpha \leqslant \int_0^1 \| x_m(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$$

当n、$m\to\infty$时上式右边趋近于零。取$m\to\infty$，下式成立

$$\int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha \leqslant \int_0^1 \| x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha + \int_0^1 \| x(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$$

反之，若$x(\alpha)$强可测且$\| x(\alpha) \|$为可积函数，则
$\| x(\alpha) - x_n(\alpha) \|$几乎处处收敛于零。这样

$$\int_0^1 \| x(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha \to 0$$

表明当$m,n\to\infty$时

$$\int_0^1 \| x_m(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha \to 0$$

B-可积函数的性质：

性质(1) 若$x_1(\alpha)$、$x_2(\alpha)$在$[0,1]$上B-可积，则对实数a_1、a_2有

$$\int_0^1 [a_1 x_1(\alpha) + a_2 x_2(\alpha)]\mathrm{d}\alpha = a_1\int_0^1 x_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha + a_2\int_0^1 x_2(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

性质(2) $\left\| \int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right\| \leqslant \int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$

性质(3) 若$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n$、$S_n \cap S_m = \varnothing (n \neq m)$，$S_n$为可测集，则

$$\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_n} x(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

性质(4) 若 $f(\alpha)$ 是在[0,1]闭区间有界、可测的实函数，$x(\alpha)$ 为在[0,1]上可积的向量函数，则 $f(\alpha)x(\alpha)$ 可积。

利用性质(4)易推出性质(3)。

实际上，置

$$f(\alpha)=g_S(\alpha)=\begin{cases}1 & \alpha\in S\subset[0,1]\\ 0 & \alpha\notin S\end{cases}$$

取

$$\int_0^1 g_S(\alpha)x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_S x(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

据此知 $[0,1]=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$、$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j)$。令 $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{\infty}g_{S_i}(\alpha)$，导出

$$\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 f(\alpha)x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{S_i} x(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

性质(5) 如果 $x(\alpha)$ 在[0,1]上可积，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（δ 与 $x(\alpha)$、ε 有关），那么当 $\sum_{n=1}^{\infty}m(S_n)<\delta$ 时（$S_n\subset[0,1]$），

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\int_{S_n} x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\| < \varepsilon$$

证明：记 $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$，依性质(3)

$$\int_S x(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_n} x(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

定义范数

$$\left\|\int_S x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\int_{S_n} x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_n}\|x(\alpha)\|\mathrm{d}\alpha$$

注意到 $\|x(\alpha)\|$ 可积，应用实函数理论知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，

当 $\sum_{n=1}^{\infty} m(S_n) < \delta$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_n} \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha < \varepsilon$。

性质(6) 如果 $x(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上 B-可积，而 T 为线性运算从 E 变到 E_1，那么对 $x(\alpha)\in E$，有下式成立：

$$T\left[\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right] = \int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha$$

证明：(1) 若 $x(\alpha)$ 为可列值的向量函数，则

$$\begin{aligned} T\left[\int_0^1 x(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right] &= T\left[\sum_{i=1}^{\infty} x_i m(S_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} T[x_i] m(S_i) = \int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

且

$$\int_0^1 \| T[x(\alpha)] \| \mathrm{d}\alpha \leqslant \| T \| \int_0^1 \| x(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha < \infty$$

(2) 若 $x(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha)$ 几乎处处成立，则

$$\left\| \int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha - \int_0^1 T[x_n(\alpha)]\mathrm{d}\alpha \right\| = \left\| \int_0^1 T[x(\alpha) - x_n(\alpha)]\mathrm{d}\alpha \right\|$$

$\leqslant \| T \| \int_0^1 \| x(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha$ 但

$$\int_0^1 \| x(\alpha) - x_n(\alpha) \| \mathrm{d}\alpha \to 0$$

故

$$\int_0^1 T[x(\alpha)]\mathrm{d}\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 T[x_n(\alpha)]\mathrm{d}\alpha$$

6.1.3 有界变差函数

定义6.8 向量函数 $x(t)$ 定义在 $[0,1]$ 上取值于 B 空间 E（巴拿赫空间）称作弱有界变差函数，对任意 $f\in \overline{E}$（E 的共轭空间）使 $f(x(t))$ 是一个有界变差函数（实函数）。

定义6.9 $x(t)$ 称为强有界变差函数，当

$$\sup_D \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \| x(t_{i+1}) - x(t_i) \| \right\}$$

有界,$D: t_0=0<t_1<\cdots<t_n=1$;以$\mathop{\mathbf{V}}\limits_0^1(x(t))$表示该上确界,称作全变差。

定义6.10 $x(t)\in E$ 定义在$[0,1]$上,对任意$\delta>0$,当$[0,1]$中存在任意有限个两两互不相交的区间(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、(a_n,b_n)满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$,使

$$\sum_{i=1}^{n}\|x(b_i)-x(a_i)\|<\varepsilon$$

成立,称$x(t)$为绝对连续函数。

有界变差函数的性质:

(1) 若$x(t)$、$y(t)$为强有界变差函数,则$\alpha x(t)+\beta y(t)$也是强有界变差函数。

(2) 强有界变差函数为弱有界变差函数。

(3) 强绝对连续函数为强有界变差函数。

称所有绝对收敛的序列空间为l空间。对于$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$,可定义其范数为 $\|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|$。

定理6.10 $x\in l$ 空间$(0\leqslant t\leqslant 1)$,其为强有界变差函数的充要条件是:

(1) 各支量$x_i(t)$为有界变差函数$(i=1,2,\cdots)$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathop{\mathbf{V}}\limits_0^1(x_i(t))<\infty$。

事实上,对于充分性。考虑$D: t_0=0<t_1<\cdots<t_n=1$,则

$$\begin{aligned}&\sup_D\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\|x(t_{i+1})-x(t_i)\|\right\}\\=&\sup_D\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}|x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)|\right\}\\=&\sup_D\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}|x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)|\right\}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{D} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |x_k(t_{i+1}) - x_k(t_i)| \right\} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \bigvee_{0}^{1} (x_k(t)) < \infty$$

对于必要性。设存在 $x_i(t)$ 使 $\bigvee_{0}^{1}(x_i(t)) = +\infty$，则对任意 $M > 0$，存在一个分割

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$$

有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |x_k(t_{i+1}) - x_k(t_i)| \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} |x_k(t_{i+1}) - x_i(t_i)| > M$$

故

$$\sum_{i=1}^{n-1} \| x(t_{i+1}) - x(t_i) \| > M$$

表明 $x(t)$ 不是强有界变差函数。

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \bigvee_{0}^{1} (x_n(t)) = \infty$，于是对任意 $M > 0$，存在 N，使

$$\sum_{n=1}^{N} \bigvee_{0}^{1} (x_n(t)) > M + 1$$

由于 $x_n(t)$ 为有界变差函数，存在分割

$$\{t_i^n\} : t_0^n = 0 < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{m_n}^n = 1$$

让

$$\bigvee_{0}^{1} (x_n(t)) < \sum_{i=0}^{m_n - 1} |x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)| + \frac{1}{N} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

进一步作分割，包括上列 N 组分点。重排之，使成

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$$

导出

$$\bigvee_{0}^{1} (x_n(t)) < \sum_{i=0}^{m-1} |x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| + \frac{1}{N}$$

并

$$\sum_{n=1}^{N} \bigvee_{0}^{1} (x_n(t)) < \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{m-1} |x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| + 1$$

据此，

$$M < \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m-1}|x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{N}|x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| = \sum_{i=1}^{m-1}\| x(t_{i+1}) - x(t_i) \|$$

因此$x(t)$非强有界变差函数。

定理6.11 若$x(t)$为l空间的绝对连续向量函数，则各支量$x_k(t)$为绝对连续，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{V}}}(x_k(t)) <+ \infty$$

证明：(1) $|x_k(b_i) - x_k(a_i)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|x_k(b_i) - x_k(a_i)|$

$$= \| x(b_i) - x(a_i) \|$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}|x_k(b_i) - x_k(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\| x(b_i) - x(a_i) \| < \delta$$

依上式知$x_k(t)$为绝对连续函数($k=1,2,\cdots$)。

(2) 因为绝对连续性导致有界变差，所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{V}}}(x_k(t)) <+ \infty$$

今用E_1、E_2、E_3表示不同的巴拿赫空间，而$x\in E_1$、$y\in E_2$；定义乘积$xy\in E_3$可建立斯蒂杰斯积分，且$\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$。

定义6.11 设$x(t)\in E_1$、$y(t)\in E_2$、$xy\in E_3$，$t\in[a,b]$。作分割

$$D: a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

建立和

$$\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)]$$

上列和当$\max\limits_i|t_{i+1}-t_i|\to 0$时极限存在，记作

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t)$$

称之为斯蒂杰斯积分。

斯蒂杰斯积分性质：

(1) $\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = -\int_b^a x(t)\mathrm{d}y(t)$

(2) 当 $\int_b^a x(t)\mathrm{d}y$、$\int_a^b \mathrm{d}x(t)y(t)$ 存在时，

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) + \int_a^b \mathrm{d}x(t)y(t) = x(b)y(b) - x(a)y(a)$$

(3) 若 $x(t)=x_0$（常数），则

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x_0\mathrm{d}y(t) = x_0[y(b) - y(a)]$$

(4) 若 $x(t)$有形式如 $x_0\varphi(t)$，而 $\varphi(t)$为实函数、$\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}y(t)$ 存在，则

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x_0\varphi(t)\mathrm{d}y(t) = x_0\int\varphi(t)\mathrm{d}y(t)$$

(5) 若 $y(t)=y_0\varphi(t)$（y_0 为常数），$\varphi(t)$为实函数，则

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t)y_0$$

(6) $\int_a^b x_0\varphi(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}[x_0y(t)]$

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}[y_0\varphi(t)] = \int_a^b [x(t)y_0]\mathrm{d}\varphi(t)$$

(7) $\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^c x(t)\mathrm{d}y(t) + \int_c^b x(t)\mathrm{d}y(t) \quad (a<c<b)$

(8) $\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x_1(t)\mathrm{d}y(t) + \int_a^b x_2(t)\mathrm{d}y(t)$

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}[y_1(t) + y_2(t)] = \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_1(t) + \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_2(t)$$

(9) 若 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t)$ 存在且 $t=\theta(\tau)$在$[\alpha,\beta]$上为渐增函数，而 $\theta(\alpha)=a$、$\theta(\beta)=b$，则

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^\beta x(\theta(\tau))\mathrm{d}y(\theta(\tau))$$

定理 6.12 若 $x(t)\in E_1$，在$[a,b]$上连续；$y(t)\in E_2$、$t\in[a,b]$为强有界变差函数，则

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t)$$

存在并符合

$$\left\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t) \right\| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \| x(t) \| \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(y(t))$$

定理6.13 若$\{x_n(t)\}$为连续向量函数列并一致收敛于$x_0(t)$，$x_n(t)$、$x_0(t)\in E_1$ 且$t\in[a,b]$，又$y(t)\in E_2$为强有界变差函数，则当$x_n(t)y(t)\in E_3$时

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}y(t) = \int_a^b x_0(t)\mathrm{d}y(t)$$

实际上，利用下列不等式即得本定理。由于$x_n(t)$一致收敛于$x(t)$，

$$\left\| \int_a^b [x_n(t) - x_0(t)]\mathrm{d}y(t) \right\| \leqslant \int_a^b \| x_n(t) - x_0(t) \| \, \| \mathrm{d}y(t) \|$$

$$\leqslant \max \| x_n(t) - x_0(t) \| \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(y(t))$$

定理6.14 如果$x(t)$为连续向量函数且$t\in[a,b]$，$y_k(t)$一致收敛于$y_0(t)$，又$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}} y_k(t)\leqslant M(k=1,2,\cdots)$，那么

(1) $y_0(t)$为有界变差函数，$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(y_0(t))\leqslant M$；

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b x(t)\mathrm{d}y_k(t) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_0(t)$

证明：(1) 是显然的。

(2) 任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|t'-t''|<\delta$时

$$\| x(t')-x(t'') \| <\varepsilon$$

当分割点增多使$\max|t_{i+1}-t_i|<\delta$时，

$$\left\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_k(t) - \sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)[y_k(t_{i+1}) - y_k(t_i)] \right\|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \| x(t) - x(\tau_i) \| \, \| \mathrm{d}y_k \| \leqslant \max_{\max|t'-t''|<\delta} \left\| x(t') - x(\tau')\int_a^b \mathrm{d}y_k(t) \right\| <\varepsilon \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(y_k(t))=\varepsilon M$$

同理，

$$\left\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_0(t) - \sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)[y_0(t_{i+1} - y_0(t_i))] \right\| < \varepsilon M$$

对适当大的k，取$\| y_k(t_i) - y_0(t_i) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$，得

$$\left\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_k(t) - \int_a^b x(t)\mathrm{d}y_0(t) \right\| \leqslant \varepsilon [2M + \max_{a\leqslant t\leqslant b} \| x(t) \|]$$

6.2 加头积分

6.2.1 平均值存在定理

定义6.12 希尔伯特空间H应满足下列条件：

(1) H为复线性空间，若f、$g \in H$且α、β为复数，则

$$\alpha f + \beta g \in H$$

(2) 对f、$g \in H$，存在复数(f,g)与之对应，称之为内积，应适合：

1) $(f,g) = \overline{(g,f)}$；

2) $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$；

3) $(f,f) \geqslant 0$，当且仅当$f=0$时等号成立。

(3) 范数$\| f \| = \sqrt{(f,f)}$，并有

1) $\| f \| > 0$；

2) $\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$；

3) $\| \alpha f \| = |\alpha| \, \| f \|$。

4) 在范数$\| \cdot \|$下H是完备的。

5) 无穷维。

定义6.13 H称为可析希尔伯特空间，如果H满足定义6.12的条件并且存在一个可列子集处处稠密于H。

所有平方绝对收敛级数构成l^2空间，命x、$y \in l^2$空间，$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$、$y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$$

定义其内积

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n$$

由于l^2空间存在基底，因此l^2空间为可析希尔伯特空间。

平方可积函数构成$L^2(a,b)$空间。对$f(x)\in L^2(a,b)$，定义其内积

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

今取$f\in L^2[0,2\pi]$，有

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (A)$$

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\end{cases}$$

定理6.15 在式(A)中如果

$$\frac{1}{2}|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)<+\infty$$

那么$f(x)$的傅里叶级数式(A)的部分和平均收敛于$f(x)$。或，设

$$S_n=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n}|f(x)-S_n(x)|^2\mathrm{d}x=0$$

定理6.15的重要性在于$f(x)$可以依数列$\{a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\}$确定，反之这个数列由$f(x)$确定，故

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

组成$L^2(0,2\pi)$的基底；ρ^2空间与$L^2(0,2\pi)$空间通过定理6.15建立了联系。

定义在$L^2(0,2\pi)$空间的泛函数的一般形式为

$$f[x(t)]=\int_0^{2\pi}x(t)\beta(t)\mathrm{d}t \qquad (\beta(t)\in L^2[0,2\pi])$$

当$\beta(t)\sim\dfrac{1}{2}\alpha_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$时

$$f[x]=\int_0^{2\pi}x(t)\beta(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}a_0\alpha_0+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

这里 α_0、α_n、$\beta_n(n=1,2,\cdots)$为固定的数列，依 f 确定；而 a_0、a_n、b_n 是可变的，其依变量 x 确定；它不过是无限多个变量的函数

$$f[x]=f(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots)$$

的最简单的情况。一般情况下考察一个有基底的巴拿赫空间 $E(x\in E)$，这样

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n+\cdots$$

$\|e_i\|=1(i=1,2,\cdots)$。λ_i 可实可复，定义在空间E 的泛函数，无论线性还是非线性，均可表示成

$$f(x)=f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n+\cdots)=F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots)$$

所以任意一个定义在有基底的巴拿赫空间上的泛函数可以作为无穷多个变量的函数。

（1）一部分泛函数可用斯蒂杰斯积分表达，

$$F(f)=\int_{\Omega}f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$\mu(x)$或为测度函数或为分布函数。分布函数 $F(x)$为一个渐增函数，左半（或右半）连续，且 $F(-\infty)=0$、$F(+\infty)=1$，也可以说是加上限制的有界变差函数。已知连续函数空间$C[0,1]$上线性泛函数为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)$$

式中 $g(x)$为有界变差函数；斯蒂杰斯积分可表达成下列和的极限

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

其中 $x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$。令 $x'_0=f(x_0)$、$x'_1=f(x_1)$、$\cdots$、$x'_n=f(x_n)$，结果

$$F(f)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x'_0,x'_1,\cdots,x'_n)$$

若 x_0、x_1、$\cdots$、x_n 暂时固定，对不同的 f 而言有不同的 x'_0、x'_1、$\cdots$、x'_n，则定义在$C[0,1]$的泛函数一般可表达为

$$F(f)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x'_0,x'_1,\cdots,x'_n)$$

即 $F(f)$ 可用实函数序列

$$\varphi_0(x'_0),\varphi_1(x'_0,x'_1),\cdots,\varphi_n(x'_0,x'_1,\cdots,x'_n)$$

确定。

(2) 根据概率理论，概率函数为定义在波莱尔集合上的可加集合函数。若 A、B、…为波莱尔集合，则概率函数满足：

1) $P(A)\geqslant 0$；

2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　　$(A\cap B=\varnothing)$

3) $P(\varnothing)=0$、$P(T)=1$。　　(T 为全集)

设 R 为实数集、ξ 为随机变量，置 $P(\xi\leqslant x)=F(x)$，称之为分布函数，而 $F(+\infty)=1$、$F(-\infty)=0$，$F(x)$ 为渐增函数。

$$P(\xi<x)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}F(x)\qquad P(R)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}F(x)=1$$

对任意可积函数 $g(x)$，作积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}F(x)$$

称为数学期望 $E[g(x)]$。

(3) 平均值概念。

已知函数 $\omega(x)>0$，定义加权平均值

$$\omega(f)=\frac{\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x}$$

称 $\omega(f)$ 为加权平均值。当 $\omega(x)=1$ 时变为普通积分平均值，即

$$M_0(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(4) 综合(1)、(2)、(3)可以断言：概率、平均值、积分以及某些线性泛函数在本质上相同，均可变为无穷维实(复)空间的函数。

处理无穷个变量的积分有两种方法：

1) 直接定义，也称为 Jessen 法。考虑 Torus 空间，即取区间 $I_n=[0,1](n=1,2,\cdots)$，作直积空间 S，

$$S=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times\cdots$$

在S上定义函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\qquad(x_n\in I_n)$$

在S空间的收敛可理解为每个坐标的收敛。令

$$x、x^n\in S,x=(x_1,x_2,\cdots,x_r,\cdots)、x^n=(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_r^n,\cdots)$$

而$x^n\to x$是指对r而言有$x_r^n\to x_r$。但这种收敛未必一致收敛。

2）逼近法和加权逼近。设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$为有无穷个变量的函数，而$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$在某个空间的子集$B$上变化；若$B$包括$0=(0,0,\cdots,0,\cdots)$，则$B_n$表示$(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots,0)$当$x\in B$时的所有可能的点。要求$B_r$为$B$的子集。若

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=\lim_{n\to\infty}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

这里$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots,0)$，$g_n$为$n$维空间的实（复）函数。定义积分

$$\int\cdots\int_{B_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

于是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$在$B$上的积分可表达成

$$\int_B f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int\cdots\int_{B_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\cdots\mathrm{d}x_n$$

命$W_1(x_1)、W_2(x_1,x_2)、\cdots、W_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdots$为一列非负的函数，加权积分定义

$$\begin{aligned}&\int_B f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)W(x_1,x_2,\cdots)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int\cdots\int_{B_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)W_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

（5）可积性、基本空间、区间、平均值。

在有基底的巴拿赫空间E中取元素x，

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n+\cdots$$

$\{e_i\}(i=1,2,\cdots)$为一个基底系。记

$$V_\infty=\prod_{i=1}^{\infty}[b_i-a_i]$$

为无穷乘积。若$b_i-a_i\geqslant1+\varepsilon$，则$V_\infty=\infty$；若$0<b_i-a_i<1-\varepsilon$，则$V_\infty=0$。这两种情况不会导致更有意义的结果，为此使用平均值概念回避上述问题，即

$$M(f)=\frac{\int_B f(x_1,x_2,\cdots)\mathrm{d}x}{\int_B \mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int\cdots\int_{B_n} g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n}{\int\cdots\int_{B_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}$$

这个连续有界泛函数积分为有限数。

若e_1、e_2、…、e_n、…为巴拿赫空间E的基底，$x\in E$，$f(x)$为泛函数，则其可变为无穷个变量的函数

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$$

称E为基本空间；$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n+\cdots$，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$为坐标。当$x_1$、$x_2$、…为实数时称$E$为实空间；当$x_1$、$x_2$、…为复数时称$E$为复空间。

取a、$b\in E$，$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots)$、$b=(\beta_1、\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots)$，$x_i\in[\alpha_i,\beta_i](i=1,2,\cdots)$，称为$\langle a,b\rangle$闭区间。

因为区间$\langle a,b\rangle$各边长为$\beta_i-\alpha_i$，所以其体积可理解为$V=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)$。

定义6.14 称$f[x]=f(x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots)$在区间$\langle a,b\rangle$上连续，如果$x,x^{(m)}\in\langle a,b\rangle$，对$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\|x-x^{(m)}\|<\delta$、$m>N(\delta)$时

$$|f[x]-f[x^{(m)}]|<\varepsilon$$

定义6.15 记

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\cdots)=g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$M(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_n-\alpha_n)}$$

若以上极限存在，则$M(f)$称为$f[x]=f(x_1,x_2,\cdots)$在$\langle a,b\rangle$上的平均值。关于$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$取黎曼积分。

定理6.16 如果$f[x]$在$\langle a,b\rangle$上有定义，并$f[x]$为定义6.14中的$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一致极限，即对当$n>N(\varepsilon)$时

$$|f[x]-g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)|<\varepsilon$$

且令$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$I_n:\alpha_i\leqslant x_i\leqslant\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$上连续$(n=1,2,\cdots)$，那么平均值$M(f)$在$\langle a,b\rangle$上存在。

证明：当m、$n\geqslant N(\varepsilon)$、$m>n$时，

$$\begin{aligned}&|g_m(x_1,x_2,\cdots,x_m)-g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\\ \leqslant&|g_m-f[x]|+|g_n-f[x]|<2\varepsilon\end{aligned}$$

从

$$M_m-M_n=\frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_m}^{\beta_m}(g_m-g_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_m-\alpha_m)}$$

知

$$|M_m-M_n|<2\varepsilon$$

由于M_n成为柯西收敛列，因此极限存在，即

$$M(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{(\beta_1-\alpha_1)\cdots(\beta_n-\alpha_n)}$$

定理6.17 若$f[x]=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$为$l$空间在$\langle a,b\rangle$上一致连续的泛函数，则平均值

$$M(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_n-\alpha_n)}$$

存在。

6.2.2 积分条件

Daniell 积分为定义在线性空间上的非负线性泛函数，满足：

(1) $M(f+g)=M(f)+M(g)$;

(2) $M(Cf)=CM(f)$;

(3) 若 $f\geqslant 0$,则 $M(f)\geqslant 0$;

(4) 若 $f\geqslant g$,则 $M(f)\geqslant M(g)$;

(5) 若 $f_n\downarrow 0$,则 $M(f_n)\to 0$。

这里"$f_n\downarrow$"表示序列 f_n 逐点下降,即 $f_{n+1}(p)\leqslant f_n(p)$ 对所有 $p\in\langle a,b\rangle$ 成立。

定义6.16 一个序列泛函数 $f_n[x]$ 称为在 $\langle a,b\rangle$ 上一致收敛于 $f[x]$,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$ 时

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (x\in\langle a,b\rangle)$$

成立。

从

$$|f[x_0]-f[x]|\leqslant|f[x_0]-f_n[x_0]|+|f_n[x_0]-f_n[x]|+|f_n[x_0]-f[x]|$$

知连续泛函数的一致收敛的极限仍是连续泛函数。

证明:

对于(1),

$$\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}(f+g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (6.1)$$

而

$$f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\alpha_{n+1},\cdots)$$

$$g=g(x_1,x_2,\cdots,x_n,\alpha_{n+1},\cdots)$$

$$V_n=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_n-\alpha_n)$$

式(6.1)两边取极限就有

$$M(f+g)=M(f)+M(g)$$

对于(2),

$$\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}Cf\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{C}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (6.2)$$

式(6.2)两边取极限就有

$$M(Cf)=CM(f)$$

对于(3)，

若 $f[x]\geqslant 0$　　且 $x\in\langle a,b\rangle$

则

$$\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\geqslant 0 \tag{6.3}$$

式(6.3)两边取极限就有

$$M(f)\geqslant 0$$

对于(4)，若 $f[x]\geqslant g[x]$

则依(3)有

$$M(f)\geqslant M(g) \tag{6.4}$$

对于(5)，$f_n\downarrow 0(f_n\geqslant 0)$当$\langle a,b\rangle$为紧集时，$f_n[x]$为定义在$\langle a,b\rangle$上的连续泛函数。由 $f_{n+1}[x]\leqslant f_n[x]$得知 $f_n[x]$一致收敛于零。

实际上，对任意$\varepsilon>0$，作$C_n=\{x\mid f_n(x)\geqslant\varepsilon\}$。因为$C_n$为紧闭集，而$C_{n+1}\subset C_n(n=1,2,\cdots)$，所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 有两种可能，也就是$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n=D$ (D 或为空集或为非空集)。设D 非空，存在$x\in C_n$，使$f_n(x)\geqslant\varepsilon$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}f_n[x]=0$ 矛盾，于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n=\varnothing$ 。若有n_0 使$f_{n_0}(x)<\varepsilon$ 对一切x 成立，则当$n>n_0$ 时 $f_n(x)<\varepsilon_0$ 或者说$f_n(x)$一致收敛于零。可以证明 $f_n(x)$的平均值也趋近于零。

注意到$M(f_n)\leqslant\varepsilon$，当$x\in\langle a,b\rangle$时 $f_n[x]<\varepsilon$。

总之，在紧区间$\langle a,b\rangle$上连续泛函数的平均值就是Daniell 积分。

中值定理　若$f(x,y)$在连通闭域$\mathscr{D}$ 上连续，则存在点$(\xi,\eta)\in D$ 有

$$\frac{1}{|\mathscr{D}|}\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)$$

现将中值定理推广到巴拿赫空间。

定理6.18　设$f[x]$为定义在B 空间的闭区间$\langle a,b\rangle$上的连续

泛函数。如果

$$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\alpha_{n+1},\cdots)$$

为连续函数，那么对于紧集$\langle a,b\rangle$，当平均值存在时在$\langle a,b\rangle$上的点$x^*\in\langle a,b\rangle$，使平均值$M(f)$适合

$$M(f)=f[x^*]$$

证明：依定义

$$M(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

注意到$g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维空间闭区间I_n：$\alpha_i\leqslant x_i\leqslant\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$上的连续函数，于是有点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in I_n$使

$$\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=g_n(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

式中$g_n(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\alpha_{n+1},\cdots)$，记作

$$g_n(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=f[x^{(n)}],x^{(n)}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\alpha_{n+1},\cdots)\in$$

$$\langle a,b\rangle,M(f)=\lim_{n\to\infty}f[x^{(n)}]$$

由于$\langle a,b\rangle$为紧的，因此存在$x^*\in\langle a,b\rangle$使$x^{(n)}$有一个子列$x^{(n_i)}$让$\lim\limits_{i\to\infty}x^{(n_i)}=x^*$。这样$M(f)=f[x^*]$。

6.2.3 线性与二次泛函数

定义在具有基底e_1、e_2、…、e_n、…的B空间上的线性泛函数恒可表达成

$$F[x]=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

$$x=\sum_n x_nF(e_n)$$

因为$F[e_n](n=1,2,\cdots)$、$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_ne_n$，而$x$坐标为$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，所以

$$F[x]=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n+\cdots$$

显然上式级数收敛且$F[x]$为连续的。取$\langle a,b\rangle$为B空间的一个闭区间，而$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n+\cdots$、$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n+$

…,结果

$$M(F[x])=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{V_n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}x_k\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=F\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

其中$V_n=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_n-\alpha_n)$

定理6.19 线性泛函数$F[x]$在区间$\langle a,b\rangle$的平均值等于这个泛函数在区间$\langle a,b\rangle$的平分点$\frac{a+b}{2}$所取的值。

今考虑二次泛函数

$$F[x]=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j\qquad(i,j=1,2,\cdots)$$

命$F[x]$在某个B空间$\langle a,b\rangle$上连续,$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots)$、$b=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots)$,计算平均值$M(F)$。取

$$T[x]=\sum_i a_{ii}x_i^2\qquad Q(x)=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j(i\neq j)$$

推出$F[x]=Q[x]+T[x]$及$M[F]=M(Q)+M(T)$。

$$M(T)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}x_i^2\mathrm{d}x_1,\cdots\mathrm{d}x_n}{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ii}(\beta_i^2+\alpha_i\beta_i+\alpha_i^2)$$

$$M(Q)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\frac{a_{ij}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}x_ix_j\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{(\beta_1-\alpha_1)\cdots(\beta_n-\alpha_n)}\quad(i\neq j)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i,j}a_{ij}(\beta_i+\alpha_i)(\beta_j+\alpha_j)$$

$$=\frac{1}{4}[Q(b)+Q(a)]+\frac{1}{4}\sum_{i,j}a_{ij}(\alpha_i\beta_j+\beta_i\alpha_j)$$

$M(T)$、$M(Q)$相加得到$M(F)$。

一般而言,令

$$F[x]=\sum_{i}a_ix_i+\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i,j,k}a_{ijk}x_ix_jx_k+\cdots$$

在区间$\langle a,b\rangle$上收敛，则称之为解析泛函数。其平均值的计算可变为计算一次、二次、三次、…的泛函数。

6.2.4 加头积分定义

现有$a(t)\leqslant x(t)\leqslant b(t)$、$t\in[0,1]$，而$a(t)$、$x(t)$、$b(t)$均为连续函数。作分割

$$t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$$

命$a(t_i)=t_i$、$x(t_i)=x_i$、$b(t_i)=b_i(\lambda=0,1,2,\cdots,n)$。

把定义在$C[0,1]$空间的泛函数$F[x(t)]$写成

$$F[x(t)]=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

取

$$I_n=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\Phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

该积分或黎曼可积或勒贝格可积。若$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=I$存在，则称$I$为$F[x(t)]$在拟区间$\langle a(t),b(t)\rangle$上的积分，记作

$$I=\int_{a(t)}^{b(t)}F[x]\mathrm{d}_G x$$

【例6.1】 已知$F[x]=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}g(t)$，计算$F[x]$在$a(t)=0$、$b(t)=1$之间的积分。

解：置

$$\Phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i[g(t_{i+1})-g(t_i)]$$

从$a(t)=0$、$b(t)=1$知$a_i=0$、$b_i=1(i=1,2,\cdots,n)$，故

$$I_n=\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{i=1}^{n}x_i[g(t_{i+1})-g(t_i)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

其中x_i为$x(t_i)$，推出

$$I_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[g(t_{i+1})-g(t_i)]=\frac{1}{2}[g(1)-g(0)]$$

当$n\to\infty$时

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}[g(1)-g(0)]$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

存在，那么称之为$F[x(t)]$的平均值，以$\langle F[x]\rangle$表示，

$$v_n=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

对于$F[x(t)]$在$\langle a(t),b(t)\rangle$上的平均值，$F[y(t)]$在$\langle a(t)+x_0(t),b(t)+x_0(t)\rangle$上也存在平均值，且$y(t)=x(t)+x_0(t)$。分割$D$：

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$$

$y(t_i)=x(t_i)+x_0(t_i)$就有$y_i=x_i+x_{oi}$，$a(t_i)=a_i$、$b(t_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是

$$\begin{aligned}F[y(t)]&=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_1+x_{01},x_2+x_{02},\cdots,x_n+x_{0n})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle F[y(t)]\rangle\Big|_{a+x_0}^{b+x_0}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n}\int_{a_1+x_{01}}^{b_1+x_{01}}\cdots\int_{a_n+x_{0n}}^{b_n+x_{0n}}\varphi(x_1+x_{01},\cdots,x_n+x_{0n})\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n}\int_{a_1+x_{01}}^{b_1+x_{01}}\cdots\int_{a_n+x_{0n}}^{b_n+x_{0n}}\varphi_n(x_1+x_{01},\cdots,x_n+x_{0n})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\langle F[x+x_0]\rangle\Big|_{a+x_0}^{b+x_0}\end{aligned}$$

【例 6.2】 $F[x]=\int_0^1 h[x(t)]\mathrm{d}v(t)$

$$F[x]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}h[x(t_i)][v(t_{i+1})-v(t_i)]$$

$$\langle F[x]\rangle\Big|_{a(t)}^{b(t)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\sum_{i=0}^{n} h(x_i)[v(t_{i+1}) - v(t_i)]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{b_i - a_i}\int_{a_i}^{b_i} h(x_i)\mathrm{d}x_i[v(t_{i+1}) - v(t_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{u(b_i) - u(a_i)}{b_i - a_i}[v(t_{i+1}) - v(t_i)]$$

其中$u(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$，这样

$$\langle F[x]\rangle \Big|_{a(t)}^{b(t)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{u(b(t_i))-u(a(t_i))}{b(t)-a(t)}[v(t_{i+1})-v(t_i)]$$

$$= \int_0^1 \frac{u(b(t)) - u(a(t))}{b(t) - a(t)}\mathrm{d}v(t) = \int_0^1 \frac{A(t)}{b(t) - a(t)}\mathrm{d}v(t)$$

式中 $A(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} h(x)\mathrm{d}x$。

Jessen 积分主要取决于区间的定义。令I_n 为$0\leqslant x_n\leqslant 1$。$I_\Omega$ 表示I_n 的直积空间，

$$I_\Omega=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\times\cdots$$

$x\in I_\Omega$、$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$、$x_n\in I_n$。该空间的收敛定义为每个坐标$x_i(i=1,2,\cdots)$上点点收敛，但这种收敛未必是一致收敛。$I_\Omega$ 为 Torus 空间，并为紧空间。

定义I_Ω 空间的区间：对有限n 而言，建立$I_1\times I_2\times\cdots\times I_n=Q_n$内的$n$ 维区间$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$；此$n$ 维区间再与$I_{n+1}\times I_{n+2}\times\cdots=Q_{n\Omega}$接合，得到$I_\Omega$ 的区间$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\times Q_{n\Omega}$；而 $J = \prod_{i=1}^{n}[b_i - a_i]$ 为该区间的体积。因为$Q_{n\Omega}$的每条边长为1，所以只有前n 个长度有作用。

当然，所取区间可以是开的、闭的、半开半闭的，从而决定I_Ω也可以是开的、闭的、半开半闭的。

如果$f[x]=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$为定义在$I_\Omega$ 上的连续函数，那么I_Ω 可以分割成n 个区间J_1、J_2、$\cdots$、J_n，同时

$$I_\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$$

今以$m(J_i)$表示区间J_i的体积，结果有

$$m(I_\Omega) = \sum_{i=1}^{n} m(J_i) = 1$$

设$m_i = \inf\limits_{x \in J_i} f(x)$、$M_i = \sup\limits_{x \in J_i} f(x)$，作大和、小和：

$$S_n(f, I_\Omega) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, m(J_i) \qquad s_n(f, I_\Omega) = \sum_{i=1}^{n} m_i m(J_i)$$

显见

$$s_n(f, I_\Omega) \leqslant S_n(f, I_\Omega)$$

若

$$\lim_{n \to \infty} s_n(f, I_\Omega) = \lim_{n \to \infty} S_n(f, I_\Omega) = I$$

则I为$f(x)$在I_Ω上的积分，表达成

$$I = \int_{I_\Omega} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots$$

由于区间的体积有意义，因此可以建立测度、可测函数、勒贝格积分的概念。

7 非线性映射的微分

7.1 微分与导算子

7.1.1 G-微分和F-微分

今将方向导数、全微分的概念推广到作用在巴拿赫空间中的算子上。

定义7.1 设X、Y为实赋范线性空间，Ω为X中的开集，映射$f: \Omega\text{-}Y$。如果当$x\in\Omega$、$u\in X$时

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

存在并记作$Df(x,u)$，那么称$Df(x,u)$为f在x处沿方向u的弱微分或G-微分；如果对所有$u\in X$，$Df(x,u)$存在，那么称f在x处弱可微；如果f在x处弱可微，且存在$Df(x)\in B(X\to Y)$使

$$Df(x,u)=[Df(x)]u \qquad (u\in x)$$

那么称f在x处弱可导，称$Df(x,u)$为有界线性弱微分，称$Df(x)$为f在x处的弱导数或G-导算子。

若f在Ω上每个点弱可微，则称$f(x)$在Ω上弱可微；若f在Ω上每个点均具有有界线性弱微分，则称f在Ω上具有有界线性弱微分或在Ω上弱可导。G-微分常用于研究泛函数极值问题。

定义7.2 设X为实赋范线性空间，Ω为X中的开集。若泛函数$\varphi: \Omega\to R$（实数域）在Ω上具有有界线性弱微分，且$D\varphi(x)=f(x)$，则称$f: \Omega\to X^*$为φ的梯度，记作$f(x)=\mathrm{grad}\,\varphi(x)$，并称$\varphi$为$f$的位势。

【例7.1】 设X为实希尔伯特空间，在X上考虑泛函数$\varphi(x)=\|x\|$。

因为

$$\|x+tu\|-\|x\|=\frac{\|x+tu\|^2-\|x\|^2}{\|x+tu\|+\|x\|}=\frac{2(x,tu)+\|tu\|^2}{\|x+tu\|+\|x\|}$$

所以当$x\neq 0$时

$$D\varphi(x,u)=\lim_{t\to 0}\frac{2(x,tu)+\|tu\|^2}{t(\|x+tu\|+\|x\|)}=\frac{(x,u)}{\|x\|}$$

显然存在$D\varphi(x)\in X^*$使$[D\varphi(x)]u=\dfrac{(x,u)}{\|x\|}(u\in x)$。

由于希尔伯特空间为自共轭的，因此

$$\operatorname{grad}\varphi(x)=D\varphi(x)=\frac{x}{\|x\|}$$

注意，当$x=0$时$D\varphi(x,u)$不存在，也就是φ在$x=0$处非弱可微。

$$\|f(x_0+u)-f(x_0)\|\leqslant\|Df(x_0+\tau u,u)\|$$

中值定理　设X、Y为实赋范线性空间，x_0、$u\in X$，线段

$$l=\{x_0+tu\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

(1) 若泛函数φ在l上各点具有沿方向u的G-微分，则存在$\tau\in[0,1]$使

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u)$$

(2) 若取值于Y的映射f在l上各点具有沿方向u的弱微分，则存在$\tau\in[0,1]$使

(3) 若Y为巴拿赫空间，f在l上各点具有沿方向u的G-微分，且在l上$Df(x,u)$关于x连续，则

$$f(x_0+u)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\mathrm{d}t$$

上式右边为向量值函数的黎曼积分。

证明：(1) 置$F(t)=\varphi(x_0+tu)$，显见F为可微的实函数，而对$\tau\in[0,1]$使

$$F(1)-F(0)=F'(\tau)(1-0)$$

但$F'(t)=D\varphi(x_0+tu,u)$，这样

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u)$$

(2) 依巴拿赫定理，对于$f(x_0+u)-f(x_0)\in Y$，存在$\psi\in Y^*$满足$\|\psi\|=1$，并

$$\psi(f(x_0+u)-f(x_0))=\|f(x_0+u)-f(x_0)\|$$

现对泛函数$\varphi(x)=\psi(f(x))$应用(1)，得到$\tau\in[0,1]$使

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u)$$

由$D\varphi(x,u)=\psi(Df(x,u))$及上式，推出

$$\begin{aligned}\|f(x_0+u)-f(x_0)\|&=\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)\\&=\varphi(Df(x_0+\tau u,u))\leqslant\|Df(x_0+\tau u,u)\|\end{aligned}$$

(3) 对任意$\varphi\in Y^*$，取$F(t)=\varphi(f(x_0+tu))$，易知

$$F'(t)=\varphi(Df(x_0+tu,u))$$

在$[0,1]$上关于t连续，且$\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\mathrm{d}t$存在，结果

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_0+u)-f(x_0))&=F(1)-F(0)\\&=\int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t=\varphi\left[\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

注意到φ的任意性，有

$$f(x_0+u)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\mathrm{d}t$$

定义7.3 设X、Y为实赋范线性空间，Ω为X中的开集，映射$f:\Omega\to Y$。如果存在$A\in B(X\to Y)$使

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|f(x_0+u)-f(x_0)-Au\|}{\|u\|}=0$$

那么称f在x_0处强可微；称Au为f在x_0处的强微分或F-微分，记作$\mathrm{d}f(x_0,u)$；称A为f在x_0处的强导数或F-导算子，记作$f'(x_0)$或$\mathrm{d}f(x_0)$。当f在Ω上每个点均强可微时称f在Ω上强可微；称$f':\Omega\to B(X\to Y)$为f的强导映射。F-微分常用于非线性问题线性化。

从定义7.3得

(1) 若$f(x)\equiv y_0$ $(x\in X)$，则$f'(x)\equiv 0$；

(2) 若$A\in B(X\to Y)$、$f(x)=Ax(x\in X)$，则$f'(x)\equiv A$；

(3) 若f在x_0处强可微，则f在x_0处连续，即

$$\lim_{\|u\|\to 0}\|f(x_0+u)-f(x_0)\|=0$$

【例7.2】 映射$f:R^n\to R^m$（m维实赋范线性空间）定义为

$$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$、$y=(y_1,y_2,\cdots y_m)\in R^m$。由定义知$f$在$x_0$处强可微等价于每个$f_j:R^n\to R$在$x_0$处可微。对$u=(u_1,u_2,$

$\cdots, u_n) \in R^n$,

$$\mathrm{d}f(x_0, u) = (\mathrm{d}f_1(x_0, u), \mathrm{d}f_2(x_0, u), \cdots \mathrm{d}f_m(x_0, u))$$

$$\mathrm{d}f_j(x_0, u) = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f_j(x_0) + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f_j(x_0) + \cdots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} f_j(x_0)$$

得到相应于 f 的雅可比矩阵 $\{f'(x_0)\}_J$

$$\{f'(x_0)\}_J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

【例 7.3】 取 $k = k(A, S, u)$、$\dfrac{\partial k}{\partial u}$ 为 $[0,1] \times [0,1] \times (-\infty, +\infty)$ 上定义的连续实函数，考察从 $C[0,1]$ 到自身的 Urysohn 积分算子

$$[f(x)](t) = \int_0^1 k(t, s, x(s))\mathrm{d}s$$

求证：f 在 $x_0 \in C[0,1]$ 处的 G-微分为

$$[f'(x_0)]h(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x(s))h(s)\mathrm{d}s \qquad (h \in C[0,1])$$

事实上，

$$|k(t, s, x_0(s) + h(s)) - k(t, s, x_0(s)) - \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s))h(s)|$$

$$= \left| \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s) + \tau h(s)) - \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s)) \right] h(s)\mathrm{d}\tau \right|$$

$$\leqslant \| h \| \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s) + \tau h(s)) - \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s)) \right| \mathrm{d}s$$

因为 $\dfrac{\partial k}{\partial u}$ 在 $[0,1] \times [0,1] \times (-\infty, +\infty)$ 的紧子集上一致连续，所以上式最后一个积分当 $\| h \| \to 0$ 时关于 t、s 一致趋近于零，记为

$$Ah(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} k(t, s, x_0(s))h(s)\mathrm{d}s \qquad (h \in C[0,1])$$

导出

$$
\begin{aligned}
&\| f(x_0+h)-f(x_0)-Ah \| \\
&=\max_t \left| \int_0^1 \Big[k(t,s,x_0(s)+h(s))-k(t,s,x_0(s))- \right.\\
&\left. \frac{\partial}{\partial u} k(t,s,x_0(s))h(s) \Big] \mathrm{d}s = o(\|h\|) \quad t\in[0,1]
\end{aligned}
$$

从定义知 $f'(x_0)=A$

定理 7.1 若 X、Y、Z 均为实赋范线性空间，f、$g: X \to Y$ 在 x 处强可微，$h: Y \to Z$ 在 $y=f(x)$ 处强可微，则

(1) 对任意常数 c_1、c_2、c_1f+c_2g 在 x 处也强可微，且

$$(c_1f+c_2g)'(x)=c_1f'(x)+c_2g'(x)$$

(2) $h\circ f: X\to Z$ 在 x 处强可微，且

$$(h\circ f)'(x)=h'(y)\circ f'(x)$$

证明：(1) 是显然的。

(2) 对 $u\in X$、$v\in Y$，置

$$
\begin{aligned}
\alpha(x,u)&=f(x+u)-f(x)-[f'(x)]u \\
\beta(x,v)&=h(y+v)-h(y)-[h'(y)]v
\end{aligned}
$$

于是

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\alpha(x,u)\|}{\|u\|}=\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|v\|}=0$$

命 $v=[f'(x)]u+\alpha(x,u)$，有

$$
\begin{aligned}
(h\circ f)(x+u)&=h(f(x+u)) \\
&=(h\circ f)(x)+h'(g)\circ f'(x)u+ \\
&\quad h'(y)\alpha(x,u)+\beta(y,v)
\end{aligned}
$$

因为 $h'(y)\in B(Y\to Z)$，所以

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|[h'(y)]\alpha(x,u)\|}{\|u\|}=0$$

注意到

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|u\|}=\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|v\|}\frac{\|v\|}{\|u\|}=0$$

在最后一个等式中使用了 $f'(x)\in B(X\to Y)$，当 $\|u\|\to 0$ 时 $\|v\|$

$\to 0$。据此，$h \circ f$ 在 X 处强可微，其 F-导算子为

$$(h \circ f)'(x) = h'(y) \circ f'(x)$$

定理7.2 设 X、Y 为实赋范线性空间，$f: X \to Y$，f 在 x 处强可微的充要条件为 f 在 x 处存在有界线性弱微分，且极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} = [Df(x)]u$$

关于 $\|u\|=1$ 是一致的，而 $\mathrm{d}f(x) = Df(x)$。

证明：充分性，对任意 $\varepsilon > 0$，依假设可取得 $\delta > 0$，当 $|t| < \delta$ 时

$$\left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - [Df(x)]u \right\| < \varepsilon$$

对于单位球上的所有 u 成立；命 $v = tu$，当 $\|v\| < \delta$ 时

$$\| f(x+v) - f(x) - [Df(x)]v \| < \varepsilon \|v\|$$

而 $Df(x) \in B(X \to Y)$，表明 $f'(x)$ 存在且 $\mathrm{d}f(x) = Df(x)$。

必要性，设 f 在 x 处强可微，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $\|v\| < \delta$ 时

$$\| f(x+v) - f(x) - f'(x)v \| < \varepsilon \|v\|$$

对于 $\|u\|=1$，当 $|t| < \delta$ 时由以上不等式得

$$\left\| \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} - f'(x)u \right\| < \varepsilon \|u\| = \varepsilon$$

于是 $\dfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}$ 关于 u 的一致极限为 $f'(x)u$，这就是 f 在 x 处的有界线性弱微分。

根据定理7.2可以断言：设 f 在开集 Ω 上各点具有有界线性弱微分，且映射 $\Omega \to B(X \to Y): x \to Df(x)\ (x \in \Omega)$ 在 x_0 处连续，故 f 在 x_0 处强可微。

实际上，由巴拿赫定理知，存在 $F \in Y^*$、$\|F\|=1$ 使

$$F\left(\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t} - [Df(x_0)]u \right)$$

$$= \left\| \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t} - [Df(x_0)]u \right\|$$

利用中值定理有 $\tau \in [0, t]$ 使

$$
\begin{aligned}
&F\left(\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}-[Df(x_0)]u\right)\\
&=F([Df(x_0+\tau u)]u-[Df(x_0)]u)\\
&\leqslant \| Df(x_0+\tau u)-Df(x_0)\| \; \| u \|
\end{aligned}
$$

但是$Df(x)$在x_0处连续，当$t\to 0$时上式右边关于$\| u \| =1$一致趋近于零。

注意，泛函数$f(x)$在x_0处存在线性弱微分并不意味着在x_0处存在强微分。

【例 7.4】 在R上的泛函数f定义为

$$
f(x)=\begin{cases}\xi_1+\xi_2+\dfrac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2} & x=(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)\\ 0 & x=(0,0)\end{cases}
$$

由于

$$
\left|\frac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\xi_1|
$$

可知f在$(0,0)$处连续。令$u=(\eta_1,\eta_2)$，则在$(0,0)$处沿方向u的弱微分为

$$
\lim_{t\to 0}\frac{f(tu)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\eta_1+\eta_2+\frac{t^3\eta_1^3\eta_2}{t^2(t^2\eta_1^4+\eta_2^2)}\right]=\eta_1+\eta_2
$$

当$\eta_2=\eta_1^2$时$\| u \| =\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}=\sqrt{\eta_1^2+\eta_1^4}$，于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{\| u \|\to 0}\frac{f(u)-f(0)-[Df(0)]u}{\| u \|}&=\lim_{\| u \|\to 0}\frac{\eta_1^3\eta_2}{(\eta_1^4+\eta_2^2)\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}\\
&=\lim_{\| u \|\to 0}\frac{\eta_1^5}{2\,\eta_1^4\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}=\frac{1}{2}(\neq 0)
\end{aligned}
$$

表明f在$(0,0)$处非强可微。

以X、Y表示实赋范线性空间(Y完备)，x_0、$x_1\in X$，$l=\{(1-t)x_0+tx_1\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$，映射$f: l\to B(X\to Y)$连续；约定

$$
\int_l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x_0+t(x_1-x_0))(x_1-x_0)\mathrm{d}t
$$

上式右边为向量值函数的黎曼积分。

定理7.3 若X、Y为实赋范线性空间(Y完备)，Ω为X中的凸开集，映射$f:\Omega\to B(X\to Y)$，则有$\varphi:\Omega\to Y$使$\varphi'(x)=f(x)$当且仅当沿Ω中任何封闭折线C，都有

$$\int_C f(x)\mathrm{d}x = 0$$

证明：一方面，取$l=\{x_1+t(x_2-x_1)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$。而$f(x)=\varphi'(x)=D\varphi(x)$，应用中值定理，

$$\int_l f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [D\varphi(x_1+t(x_2-x_1))](x_2-x_1) = \varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$

知$\int_C f(x)\mathrm{d}x = 0$。

另一方面，任取$x_0\in\Omega$，构造

$$l_1=\{x_0+t(x-x_0)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$$

$$l_2=\{x+\tau tu\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$$

$$l_3=\{x_0+t(x+\tau u-x_0)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$$

由假定，

$$\int_{l_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{l_2} f(x)\mathrm{d}x + \left[-\int_{l_3} f(x)\mathrm{d}x\right] = 0$$

当

$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x_0+t(y-x_0))(y-x_0)\mathrm{d}t \quad (y\in\Omega)$$

时有

$$\varphi(x+\tau u)-\varphi(x) = \int_{l_3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{l_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{l_2} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 f(x+\tau tu)(\tau u)\mathrm{d}t + \int_0^\tau f(x+tu)u\mathrm{d}t$$

结果

$$\left\| \frac{\varphi(x+\tau u)-\varphi(x)}{\tau} - f(x)u \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [f(x+tu)u - f(x)u] \mathrm{d}t \right\|$$
$$\leqslant \sup_t \| f(x+tu)u - f(x)u \| \to 0 \quad t \in [0,\tau]$$

故 $D\varphi(x)=f(x)$，但 $f(x)$ 连续，从定理7.4 知 $\varphi'(x)$ 存在，即 $\varphi'(x) = f(x)$。

7.1.2 高阶微分

以 X、Y 表示实赋范线性空间，以 $X^{(n)}$ 表示 n 个 X 的乘积。

定义7.4 若 T 为 $X^{(n)} \to Y$ 的映射，$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对每个变元 X_i 均为线性，则称 T 为 n 线性算子，n 线性算子的全体记作 $(X^{(n)} \to Y)$。

当 $T \in (X^{(n)} \to Y)$ 时 T 为有界算子，即将有界集映射成有界集，设

$$\| T \| = \sup_{\| X_i \| = 1} \{ \| T(x_1,x_2,\cdots,x_n) \|, i=1,2,\cdots,n \}$$

有界 n 线性算子全体记作 $B(X^{(n)} \to Y)$，对于
$T \in B(X^{(n)} \to Y)$，对于 $T \in B(X^{(n)} \to Y)$，称 $\| T \|$ 为 T 的范数。

定理7.4 $B(X^{(n)} \to Y)$ 依通常的线性运算以及算子范数构成赋范线性空间；对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有

$$B(X^{(n)} \to Y) = B(X^{(k)} \to B(X^{(n-k)} \to Y))$$

当 Y 为巴拿赫空间时 $B(X^{(n)} \to Y)$ 为巴拿赫空间。

证明：对于 $n=1$ 的情况在线性泛函析已有结果。当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时 $B(X^{(k)} \to Y)$ 为赋范线性空间。作 $B(X^{(n)} \to Y)$ 与 $B(X^{(k)} \to B(x^{(n-k)} \to Y))$ 的元素对应：
任取 $T_n \in B(X^{(n)} \to Y)$，对固定的 x_1、x_2、$\cdots$、$x_k \in X$，$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)$ 是以 x_{k+1}、$\cdots$、x_n 为变元的有界 $n-k$ 线性算子，即存在 $T_k(x_1,x_2,\cdots,x_k) \in B(X^{(n-k)} \to Y)$ 使

$$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = T_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)(x_{k+1},\cdots,x_n)$$

易知当 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 变化时 $T_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 又是 k 线性算子，且

$$\begin{aligned}\| T_k \| &= \sup_{\|x_i\|=1} \| T_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) \|_{B_0} \\ &= \sup_{\|x_i\|=1} \sup_{\|x_j\|=1} \| T_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)(x_{k+1}, \cdots, x_n) \|_Y \\ &= \sup_{\|x_i\|=1} \| T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \| \\ &= \| T_n \| \ (B_0 = B(X^{(n-k)} - Y))\end{aligned}$$

式中$i=1,2,\cdots,k;j=k+1,\cdots,n$。于是

$$T_k \in B(X^{(k)} \to B(X^{(n-k)} \to Y))$$

这样就建立了$B(X^{(n)} \to Y)$与$B(X^{(k)} \to B(X^{(n-k)} \to Y))$之间的保距双射。当后者为巴拿赫空间时前者也是巴拿赫空间。由归纳知当Y为巴拿赫空间时$B(X^{(n)} \to Y)$也是巴拿赫空间。

定理7.5 若X为巴拿赫空间,$T_n^{(\alpha)} \in B(X^{(n)} \to Y)$为有界$n$线性算子族,对任意$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X^{(n)}$均有

$$\sup_\alpha \| T_n^{(\alpha)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \| < +\infty$$

则

$$\sup_\alpha \| T_n^{(\alpha)} \| < +\infty$$

证明:当$n=1$时就是普通的共鸣定理。现用归纳法证明一般情况。对每个α存在$T_1^{(\alpha)} \in B(X \to B(X^{(n-1)} \to Y))$使

$$T_n^{(\alpha)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = T_1^{(\alpha)}(x_1)(x_2, \cdots, x_n)$$

固定$x_1 \in X$、$(x_2, x_3, \cdots, x_n) \in X^{(n-1)}$。依假设

$$\sup_\alpha \| T_1^{(\alpha)}(x_1)(x_2, \cdots, x_n) \| = \sup_\alpha \| T_n^{(\alpha)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \| < +\infty$$

从归纳法假定知对任意$x_1 \in X$,有

$$\sup_\alpha \| T_1^{(\alpha)}(x_1) \| < +\infty$$

注意到$T_1^{(\alpha)}$为有界线性算子族,根据共鸣定理,

$$\sup_\alpha \| T_1^{(\alpha)} \| < +\infty$$

由定理7.4,$\| T_n^{(\alpha)} \| = \| T_1^{(\alpha)} \|$,即$\sup_\alpha \| T_n^{(\alpha)} \| < +\infty$。

定理7.6 若X为巴拿赫空间,n个线性算子$T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对每个变元$x_i$连续$(i=1,2,\cdots,n)$,则$T_n \in B(X^{(n)} \to Y)$。

证明:仍用归纳法。当$k=1$时结论正确。设对$k=n-1$也成立,讨论$k=n$的情况。依条件和归纳假设知存在

$$T_1(x_1)\in B(X^{(n-1)}\to Y)\quad T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\in B(X\to Y)$$

使

$$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)=T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)(x_1)$$

结果对 $\|x_1\|\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\| &= \|T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)(x_1)\|\\ &\leqslant \|T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\|\end{aligned}$$

固定 x_2、x_3、$\cdots$、x_n, $\sup\limits_{\|x_1\|\leqslant 1}\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|<+\infty$,由定理7.4,存在 $M>0$ 使 $\|x_1\|\leqslant 1$ 时

$$\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_2\|\cdots\|x_n\|$$

故

$$\|T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

定义 7.5 设 X、Y 为实赋范线性空间,映射 $f: X\to Y$,对于 u_1、u_2、$\cdots$、$u_n\in X$,约定 f 的 G-微分为

$$D^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)=D(D^{n-1}f)((x;u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}),u_n)$$

如果有 $D^n f(x)\in B(X^{(n)}\to Y)$,得

$$D^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)=[D^n f(x)](u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

那么称 $D^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为 n 阶(次)有界线性 G-微分。

定义 7.6 设 X、Y 为实赋范线性空间,映射 $f: X\to Y$ 的 n 阶(次)F-微分和 n 阶(次)F-导算子为

$$\mathrm{d}^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f)((x;u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}),u_n)$$

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$$

如果 $\mathrm{d}^n f(x)\in B(X^{(n)}\to Y)$,且

$$\mathrm{d}^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)=[\mathrm{d}^n f(x)](u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

那么称 $\mathrm{d}^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为 n 阶(次)有界线性 F-微分。

从定理7.2 知,如果在 x 的某个邻域内 $\mathrm{d}^k f(x)(k=1,2,\cdots,n-1)$ 存在且强可微,又 $\mathrm{d}^n f(x)$ 存在,那么 f 在 x 处是有直到 n 阶(次)的有界线性弱微分,且 $D^n f(x)=\mathrm{d}^n f(x)$。

下面只考虑在一个开集上强可微的情况。

定理 7.7 若 Ω 为开集,f 在 Ω 上 n 阶强可微,则

$$\mathrm{d}^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)=\mathrm{d}^n f(x;u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_n})$$

式中$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为$(1,2,\cdots,n)$的任意排列。

证明:应用归纳法。对$n=2$取$Y=R$(实数域)。若f为二阶强可微且$x\in\Omega$,u、$v\in X$,置

$$\delta f=[f(x+u+v)-f(x+v)]-[f(x+u)-f(x)]$$

依定理7.1,有$t\in[0,1]$适合

$$\delta f=\mathrm{d}f(x+v+tu,u)-\mathrm{d}f(x+tu,u)$$

注意f的可微性,

$$\mathrm{d}f(x+v,u)-\mathrm{d}f(x,u)=\mathrm{d}^2 f(x;u,v)+R^*(v,u)$$

而

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|R^*(v,u)\|}{\|v\|}=0 \tag{7.1}$$

$$R^*(v,\lambda u)=\lambda R^*(v,u) \tag{7.2}$$

这样

$$\begin{aligned}\delta f&=[\mathrm{d}f(x+v+tu,u)-\mathrm{d}f(x,u)]-[\mathrm{d}f(x+tu,u)-\mathrm{d}f(x,u)]\\&=[\mathrm{d}^2 f(x;u,v+tu)+R^*(v+tu,u)]-\\&\quad[\mathrm{d}^2 f(x;u,tu)+R^*(tu,u)]\\&=\mathrm{d}^2 f(x;u,v)+R^*(v+tu,u)-R^*(tu,u)\end{aligned}$$

应用δf关于u、v的对称性,而

$$\delta f=\mathrm{d}^2 f(x;v,u)+R^*(u+tv,v)-R^*(tv,v)$$

分别以λu,λv替代u、v,并由微分性质及式(7.2),

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^2 f(x;u,v)-\mathrm{d}^2 f(x;v,u)\\&=\frac{1}{\lambda}[R^*(\lambda(u+tv),v)-R^*(\lambda tv,v)-\\&\quad R^*(\lambda(v+tu),u)+R^*(\lambda tu,u)]\end{aligned}$$

从式(7.1),当$\lambda\to 0$时上式右边趋近于零,

$$\mathrm{d}^2 f(x;u,v)=\mathrm{d}^2 f(x;v,u)$$

若Y为一般的实赋范线性空间,任取$\varphi\in Y^*$,以$\varphi_0 f$替代f,由f二阶强可微知$\varphi_0 f$也二阶强可微,且

$$\mathrm{d}^2(\varphi_0 f)(x;u,v)=\varphi(\mathrm{d}^2 f(x;u,v))$$

注意到

$$d^2(\varphi_0 f)(x;u,v)=d^2(\varphi_0 f)(x;v,u)$$

但 $\varphi(d^2 f(x;u,v))=\varphi(d^2 f(x;v,u))$，于是

$$d^2 f(x;u,v)=d^2 f(x;v,u)$$

今设 $d^k f(x;u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 关于 u_1、u_2、$\cdots$、u_k 对称，因为

$$\begin{aligned}
&d^{k+1} f(x;u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})\\
&=d^2(d^{k-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{k-1}),u_k,u_{k+1})\\
&=d^2(d^{k-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{k-1}),u_{k+1},u_k)\\
&=d(d^k f)((x;u_1,\cdots,u_{k-1},u_{k+1}),u_k)
\end{aligned}$$

所以由归纳法假定知 $d^{k+1} f(x;u_1,\cdots,u_{k+1})$ 关于 u_1、u_2、$\cdots$、u_{k+1} 对称。

定义 7.7 若 $T\in B(X^{(n)}\to Y)$，$T(u_1,u_2,\cdots,u_n)=T(u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_n})$ 对所有 u_1、u_2、$\cdots$、$u_n\in X$ 成立，而 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意排列，则称 T 为有界对称 n 线性算子。

定理 7.8 如果 X 为巴拿赫空间，开集 $\Omega\subset X$，映射 $f:\Omega\to Y$ 在 Ω 上 n 阶强可微，那么在 Ω 上存在对称的 $d^n f(x)$；如果 $d^n f(x)$ 在 Ω 中连续，那么 $f^{(n)}(x)$ 在 Ω 中存在并有 $f^{(n)}(x)=d^n f(x)$。

证明：利用定理 7.7，$d^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 关于 u_1、u_2、$\cdots$、u_n 对称；而它关于 u_n 连续，并对每个 u_i 连续。再根据空间的完备性与定理 7.6 知，$d^n f(x;u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为有界 n 线性算子，也就是有对称的 $d^n f(x)\in B(X^{(n)}\to Y)$。

若 $d^n f(x)$ 在 Ω 中连续，可用归纳法证明 $f^{(n)}(x)$ 的存在性。$n=1$ 结论显然。令结论对 $n-1$ 也成立，依上面的证明可知存在对称的 $d^{n-1}f(x)$，且有 $d^n f(x)=d(d^{n-1}f)(x)$，表明 $d^{n-1}f(x)$ 连续。由归纳法假定，

$$d^{n-1}f(x)=f^{(n-1)}(x)$$

设 $l=\{x_1+t(x_2-x_1)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}\subset Q$，又 $d^n f(x)$ 连续，考察积分

$$\begin{aligned}
\int_l d^n f(x)dx &= \int_0^1 d^n f(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)dt\\
&= d^{n-1}f(x_2)-d^{n-1}f(x_2)
\end{aligned}$$

$$= f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(x_1)$$

据此，对任意封闭折线$C \subset \Omega$，

$$\int_C \mathrm{d}^n f(x) \mathrm{d}x = 0$$

利用定理7.3，$\mathrm{d}^n f(x)$为映射

$$f^{(n-1)}: \Omega \to B(X^{(n-1)} - Y)$$

的导映射，即$\mathrm{d}^n f(x) = (f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x)$。

7.1.3 幂级数

设X、Y为实赋范线性空间，对$T \in (X^{(n)} \to Y)$，记

$$Tu^n = T(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{n\text{个}}) \qquad (u \in X)$$

定理7.9 设X为实赋范线性空间，凸开集$\Omega \subset X$。若在Ω上定义的泛函数f具有n阶连续F-导算子，且x、$x+u \in \Omega$，则存在$\theta \in [0,1]$使

$$f(x+u) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}[f^{(l)}(x)]u^l + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta u)u^n$$

证明：记$\varphi(t) = f(x+tu)$（φ为通常的数值函数），并依假定，它具有n阶连续导数，又

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x+tu)u^k$$

对于φ使用普通的泰勒公式，$\theta \in [0,1]$满足

$$f(x+u) = \varphi(1) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}\varphi^{(l)}(0) + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}[f^{(l)}(x)]u^l + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta u)u^n$$

定理7.10 如果X、Y为实赋范线性空间，凸开集$\Omega \subset X$，$f: \Omega \to Y$，f在Ω上具有n阶连续F-导算子，x、$x+u \in \Omega$，那么

$$f(x+u) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}[f^{(l)}(x)]u^l + R_n(u)$$

其中

$$R_n(u) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}[f^{(n)}(x+tu)]u^n \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x)]u^n + o(\| u \|^n)$$

证明：对于 $n=1$，依定理 7.1 知正确。设对 $n=k$ 定理正确。$f^{(k+1)}(x)$ 连续，对 $f'(x)$ 利用归纳法假设，得到

$$f'(x+tu) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}[f^{(l+1)}(x)](tu)^l + R_k^*(tu)$$
$$R_k^*(tu) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+stu)(tu)^k]\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(x)](tu)^k + o(\| tu \|^k)$$

从定理 7.1，

$$f(x+u) - f(x) = \int_0^1 f'(x+tu)u\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}[f^{(l+1)}(x)](tu)^l + R_k^*(tu) \right\} u\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!}[f^{(l)}(x)]u^l + \int_0^1 R_k^*(tu)u\mathrm{d}t$$

余项

$$\int_0^1 R_k^*(tu)u\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \left\{ \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+stu)(tu)^k]\mathrm{d}s \right\} u$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \left\{ \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (t-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}\mathrm{d}s \right\}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(k-1)!}[f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}\mathrm{d}s \int_0^1 (t-s)^{k-1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-s)^k [f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}\mathrm{d}s$$

应用归纳假设中余项的另一种形式，有

$$\int_0^1 R_k^*(tu)u\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(x)](tu)^k + o(\| tu \|^k) \right\} u\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x)u^{k+1} + o(\| u \|^{k+1})$$

设 a_n 为对称的有界 n 线性算子，称形式无穷和为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

定理 7.11　若 $p(t)$ 为 n 次实多项式且 $\max\limits_{|t|\leqslant 1}|p(t)|\leqslant M$，则

$$|p'(0)|\leqslant M(n+1)^3$$

事实上，命 $L_k(t)$ 为 k 次勒让德多项式，于是

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(t)$$

式中 $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} p(t)L_k(t)\mathrm{d}t$。因为 $|t|\leqslant 1$、$|L_k(t)|\leqslant 1$，所以

$$|a_k| \leqslant \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} M\mathrm{d}t = (2k+1)M$$

但 $|L'_k(0)|\leqslant k$，

$$|p'(0)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k L'_k(0)\right| \leqslant M\sum_{k=0}^{n} k(k+1) \leqslant M(n+1)^3$$

定理 7.12　若 a_n 为对称的有界 n 线性算子，则

$$(a_n x^n)' = n a_n x^{n-1}$$

取 T_n 为对称的有界 n 线性算子，令

$$|||T_n||| = \sup_{\|x\|=1}\|T_n x^n\|$$

显见 $|||T_n|||\leqslant \|T_n\|$

定理 7.13　若幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7.3}$$

记 $\rho_0 = (\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|||a_n|||^{\frac{1}{n}})^{-1}$，则对 $\rho<\rho_0$，式(7.3)在 $\|x\|\leqslant\rho$ 中一致收敛，且 $f(x)$ 在 $\|x\|<\rho_0$ 中强连续、强可微，

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{7.4}$$

证明：设 $\rho<\rho_0$，对 $\varepsilon>0$ 使 $\rho=\rho_0(1-\varepsilon)$，取正整数 N，当 $n>N$ 时 $|||a_n|||^{\frac{1}{n}}<\frac{1+\varepsilon}{\rho_0}$，即当 $\|x\|\leqslant\rho$ 时

$$\| a_n x^n \| \leqslant ||| a_n ||| \, \| x \|^n < \left(\frac{1+\varepsilon}{\rho_0} \right)^n [\rho_0 (1-\varepsilon)]^n = (1-\varepsilon^2)^n$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n x^n \|$ 在 $\| x \| \leqslant \rho$ 中一致收敛，从而式(7.3)在 $\| x \| \leqslant \rho$ 中依范数一致收敛。易知 $f(x)$ 在 $\| x \| < \rho_0$ 中强连续。现证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} ||| n a_n |||^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} ||| a_n |||^{\frac{1}{n}} \tag{7.5}$$

对 $\| x \| = 1$、$\| u \| = \frac{1}{n}$，由巴拿赫定理知存在 $f \in Y^*$、$\| f \| = 1$ 使

$$f(n a_n x^{n-1} u) = \| n a_n x^{n-1} u \|$$

置 $p(t) = f(a_n (x + tu)^n)$，当 $|t| < 1$ 时

$$|p(t)| \leqslant \| f \| \, ||| a_n ||| (\| x \| + |t| \, \| u \|)^n$$

$$\leqslant ||| a_n ||| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leqslant 3 ||| a_n |||$$

可 $p'(0) = f(n a_n x^{n-1} u) = \| n a_n x^{n-1} u \|$，由定理 7.11，

$$\| n a_n x^{n-1} u \| \leqslant 3(n+1)^3 ||| a_n |||$$

这样对 $\| x \| \leqslant 1$，有

$$\| n a_n x^{n-1} \| = \sup_{\| u \| = \frac{1}{n}} \left\| n a_n x^{n-1} \frac{u}{\| u \|} \right\| \leqslant 3n(n+1)^3 ||| a_n |||$$

故

$$||| n a_n ||| = \sup_{\| x \| = 1} \| n a_n x^{n-1} \| \leqslant 3n(n+1)^3 ||| a_n |||$$

结果出现式(7.5)。

7.2 隐函数定理

7.2.1 C^p 映射

定义 7.8 设 X、Y 为实赋范线性空间，p 为非负整数，开集 $\Omega \subset X$，映射 $f: \Omega \to Y$，称 f 为 C^p 映射。对 $p=0$ 是指 f 在 Ω 上连续，对 $p>0$ 是指 f 在 Ω 上具有 p 阶(次)连续的强导映射 $f^{(p)}(x)$。

如果 U、V 分别为 X、Y 中的开集，$f: U \to V$ 为双射，且 f、f^{-1}

均为C^p映射，那么称$f:U\to V$为C^p微分同胚。

如果U、V分别为X、Y中的集合，$f:U\to V(x_0\in U)$，又设存在x_0的邻域U_0、$f(x_0)$的邻域V_0，使$f:U_0\to V_0$为C^p微分同胚，那么$f:U\to V$在x_0局部C^p微分同胚。

如果$f:U\to V$在U中每个点局部C^p微分同胚，那么称f在U局部C^p微分同胚。

在完备空间中可以从局部C^p微分同胚诱导出一个线性拓扑同构。

定理7.14 设X、Y为实巴拿赫空间，U为X中开集，$x_0\in U$、$p\geqslant 1$。若$f:U\to Y$在x_0处局部C^p微分同胚，则$f'(x_0):X\to Y$具有有界逆算子。

证明：因为f在x_0处局部C^p微分同胚，所以存在x_0的邻域U_0、$f(x_0)$的邻域V_0，使$f:U_0\to V_0$为C^p微分同胚，记作$g=f^{-1}:V_0\to U_0$，于是

$$(g_0f)(x)=x \qquad (f_0g)(y)=y$$

式中$x\in U_0$、$y\in V_0$。由于f、g均为C^p映射求导知

$$[g'(y_0)][f'(x_0)]=I_X \qquad [f'(x_0)][g'(y_0)]=I_Y$$

注意到$f'(x_0)\in B(X\to Y)$，据逆算子定理，

$$[f'(x_0)]^{-1}=g'(y_0)=g'(f(x_0))\in B(Y\to X)$$

7.2.2 隐函数的存在性和可微性

隐函数存在定理 若X、Y、Z为实巴拿赫空间，Ω为$X\times Y$中的开集，$(x_0,y_0)\in\Omega$，$f:\Omega\to Z$为连续映射并满足

(1) $f(x,y)$对变元x强可微，$f'_x(x,y)$在(x_0,y_0)处连续；

(2) $f'_x(x_0,y_0):X\to Z$具有有界逆；

(3) $f(x_0,y_0)=0$；

则存在$r>0$、$\delta>0$，当$\|y-y_0\|<\delta$时方程

$$f(x,y)=0 \tag{7.6}$$

在$\|x-x_0\|<r$内有唯一的连续解$x=g(y)$，同时$x_0=g(y_0)$。

证明：(1) 因为$f'_x(x_0,y_0):X\to Z$具有有界逆，所以存在$M>$

0 使

$$\| [f'_x(x_0, y_0)]^{-1} \| \leqslant M \tag{7.7}$$

当 $\| x-x_0 \| \leqslant r$、$\| y-y_0 \| < \delta$ 时

$$\| f'_x(x, y) - f'_x(x_0, y_0) \| < \frac{1}{2M} \tag{7.8}$$

依 $f(x_0, y)$ 连续性，不妨取 $\| y-y_0 \| < \delta$，这时

$$\| f(x_0, y) \| < \frac{r}{2M} \tag{7.9}$$

（2）今证 $\| y-y_0 \| < \delta$ 时

$$\varphi_y(x) = x - [f'_x(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \tag{7.10}$$

在 $\| x-x_0 \| < r$ 内有唯一的不动点 x^* 符合 $f(x^*, y) = 0$。

第一，由 r 的取法知当 $\| x-x_0 \| \leqslant r$ 时

$$\begin{aligned} \| \varphi_y(x) - x_0 \| &\leqslant \| \varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) \| + \| \varphi_y(x_0) - x_0 \| \\ &\leqslant \sup_{\| x-x_0 \| \leqslant r} \| \varphi'_y(x) \| \ \| x-x_0 \| + \\ &\quad \| [f'_x(x_0, y_0)]^{-1} \| \| f(x_0, y) \| < r \end{aligned}$$

这样 φ_y 将 $\| x-x_0 \| \leqslant r$ 映射到 $\| x-x_0 \| < r$ 中。

第二，由 r 的取法知当 $\| x-x_0 \| \leqslant r$ 时

$$\| \varphi'_y(x) \| = \| I - [f'_x(x_0, y_0)]^{-1} f'_x(x, y) \|$$

$$\leqslant \| [f'_x(x_0, y_0)]^{-1} \| \| f'_x(x_0, y_0) - f'_x(x, y) \| < \frac{1}{2} \tag{7.11}$$

表明 φ_y 在 $\| x-x_0 \| \leqslant r$ 内压缩。

应用压缩映射定理，当 $\| y-y_0 \| < \delta$ 时 $\varphi_y(x)$ 在 $\| x-x_0 \| < r$ 内有唯一的不动点，记作 $x = g(y)$。依上述证明知该不动点符合 $\| x-x_0 \| < r$，从唯一性得到 $x_0 = g(y_0)$。

（3）求证 $x = g(y)$ 在 $\| y-y_0 \| < \delta$ 内连续。设 $\| y_1-y_0 \| < \delta$、$\| y_2-y_0 \| < \delta$、$x_1 = g(y_1)$、$x_2 = g(y_2)$，而 $\| x_1-x_0 \| < r$、$\| x_2-x_0 \| < r$，即

$$\begin{aligned} \| x_1 - x_2 \| &= \| \varphi_{y_1}(x_1) - \varphi_{y_2}(x_2) \\ &\leqslant \| \varphi_{y_1}(x_1) - \varphi_{y_1}(x_2) \| + \| \varphi_{y_1}(x_2) - \varphi_{y_2}(x_2) \| \end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|+\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\|$$

最后一个不等号为式(7.11)的结果。从上式有

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|=|x_1-x_2|\leqslant 2\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\| \tag{7.12}$$

据 f 的连续性知当 $y_1\to y_2$ 时 $\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\|\to 0$，表明 g 连续。

从上推出：设 X、Y 为实巴拿赫空间，Ω 为 X 中的开集，$x_0\in\Omega$，$f:\Omega\to Y$ 为 C^1 映射并适合：

(1) $f'(x_0):X\to Y$ 具有有界逆；

(2) $y_0=f(x_0)$；

则存在 $r>0$、$\delta>0$，当 $\|y-y_0\|<\delta$ 时 $f(x)=y$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内有唯一的连续解 $x=g(y)$，且有 $x_0=g(y_0)$。

局部反函数定理　设 X、Y 为实巴拿赫空间，Ω 为 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$ 为 C^p 映射($p\geqslant 1$)，$x_0\in\Omega$。若 $f'(x_0):X\to Y$ 为线性拓扑同构，则 f 在 x_0 为局部 C^p 微分同胚。

证明：取 $Z=Y$、$f(x,y)=f(x)-y$，仍用隐函数存在定理证明中的记号。依推论知存在 $r>0$、$\delta>0$，当 $\|y-y_0\|<\delta$ 时 $f(x)=y$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内有唯一的连续解 $x=g(y)$、满足 $y_0=f(x_0)$。

(1) 先证 g 在 $\{y\mid \|y-y_0\|<\delta\}$ 内强可微，且在该开球中 $g'(y)$ 连续。设 $\|y_1-y_0\|<\delta$、$\|y-y_0\|<\delta$，记

$$\omega=g(y_1)-g(y_2)-[f^{-1}(g(y_2))]^{-1}(y_1-y_2)$$

又令 $y_1=f(x_1)$、$y_2=f(x_2)$，而 $\|x_1-x_0\|\leqslant r$、$\|x_2-x_0\|\leqslant r$，则

$$\begin{aligned}\|\omega\|&=\|x_1-x_2-[f'(x_2)]^{-1}[f(x_1)-f(x_2)]\|\\&\leqslant\|[f'(x_2)]^{-1}\|\ \|f(x_1)-f(x_2)-f'(x_2)(x_1-x_2)\|\end{aligned} \tag{7.13}$$

因为

$$[f'(x)]^{-1}=(I-[f'(x_0)]^{-1}(f'(x)-f'(x_0)))^{-1}[f'(x_0)]^{-1} \tag{7.14}$$

从式(7.7)、式(7.8)知

$$\| [f'(x_0)]^{-1}[f'(x)-f'(x_0)] \| \leqslant \frac{1}{2} \tag{7.15}$$

所以

$$\| \{I-[f'(x_0)]^{-1}[f'(x)-f'(x_0)]\}^{-1} \| \leqslant 2 \tag{7.16}$$

依式(7.7)、式(7.16)得

$$\| [f'(x)]^{-1} \| \leqslant 2M \tag{7.17}$$

注意到$f(x)$在x_2处强可微,由式(7.13)、式(7.17),

$$\| \omega \| = o(\| x_1-x_2 \|) \tag{7.18}$$

从式(7.12)、式(7.17),有

$$\begin{aligned} \| x_1-x_2 \| &\leqslant 2 \| \varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2) \| \\ &= 2 \| [f'(x_0)]^{-1}(y_1-y_2) \| \leqslant 2M \| y_1-y_2 \| \end{aligned}$$

于是由式(7.18)

$$\| \omega \| = o(\| y_1-y_2 \|)$$

表明$g(y)$在$\| y-y_0 \| < \delta$中强可微,且

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} \tag{7.19}$$

这里$f'(x)$连续,综合式(7.17)、$\| x_1-x_0 \| \leqslant r$、$\| x_2-x_0 \| \leqslant r$,

$$\begin{aligned} \| [f'(x_1)]^{-1}-[f'(x_2)]^{-1} \| &\leqslant \| [f'(x_1)]^{-1} \| \| [f'(x_2)]^{-1} \| \cdot \\ &\quad \| f'(x_1)-f'(x_2) \| \leqslant 4M^2 \| f'(x_1)-f'(x_2) \| \end{aligned}$$

所以$[f'(x)]^{-1}$连续。

由$g'(y)=[f'(g(y))]^{-1}$,又$[f'(x)]^{-1}$、$g(y)$均连续,故$g'(y)$也连续。

(2) 再证g为C^p映射。依假设f为C^p映射,在(1)中已证g为C^1映射。设当$k<p$时g为C^k映射;为证明g是C^{k+1}映射,只需证明$g'(y)=[f'(g(y))]^{-1}$为C^k映射。为此只要证明$[f'(x)]^{-1}$为C^k映射。从式(7.14)、式(7.15)以及定理7.13即可得到。

定理7.15 设X、Y为实巴拿赫空间,$f: X \to Y$为C^p映射($p \geqslant 1$)。如果紧集$M \subset X$、$f: M \to f(M)$为双射,当$x \in M$时$f'(x): X \to Y$为线性拓扑同构,那么存在M的邻域U、$f(M)$的邻域V使

$f: U \to V$ 为C^p微分同胚。

证 明:(1) 证明有M的邻域O使f在O上是单射。否则存在$x_n^{(1)}$、$x_n^{(2)} \in X$、$\rho(x_n^{(1)}, M) \to 0$、$\rho(x_n^{(2)}, M) \to 0$,并满足

$$f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)}) \qquad (x_n^{(1)} \neq x_n^{(2)})$$

取$u_n^{(1)}$、$u_n^{(2)} \in M$,有

$$\| u_n^{(1)} \to x_n^{(1)} \| \to 0 \qquad \| u_n^{(2)} \to x_n^{(2)} \| \to 0$$

因为M是紧的,所以可取收敛子列,不失一般性取$u_n^{(1)} \to x_n^{(1)} \in M$、$u_n^{(2)} \to x^{(2)} \in M$,这样有$x_n^{(1)} \to x^{(1)}$、$x_n^{(2)} \to x^{(2)}$。

注意到f的连续性以及$f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)})$有

$f(x^{(1)}) = f(x^{(2)})$。而f在M上为双射,于是$x^{(1)} = x^{(2)} = x \in M$。

这样,$x_n^{(1)} \neq x_n^{(2)}$、$x_n^{(1)} \to x$、$x_n^{(2)} \to x$并且$f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)})$,即$f$在$x$附近不是双射。从$x \in M$知$f'(x): X \to Y$具有有界逆。利用局部反函数定理知$f$在$x$处为局部$C^p$微分同胚,此为矛盾。

(2) 依局部反函数定理,对$x \in M$有x的邻域$U_x \subset O$、$f(x)$的邻域V_x,使$f: U_x \to V_x$为C^p微分同胚。命

$$U = \bigcup_{x \in M} U_x \qquad V = \bigcup_{x \in M} V_x$$

于是$f: U \to V$为局部C^p微分同胚。由于$f(U_x) = V_x$,因此$f(U) = V$,表明$f: U \to V$是满射。又$U \subset O$,知f还是U上的单射,也就是说$f: U \to V$是同胚,即为C^p微分同胚。

定理 7.16 如果X、Y、Z为实巴拿赫空间,Ω为$X \times Y$中的开集,$(x_0, y_0) \in \Omega$,$f: \Omega \to Z$为C^p映射($p \geqslant 1$),而$f(x_0, y_0) = 0$、$f'_x(x_0, y_0): X \to Z$具有有界逆,那么存在$r > 0$、$\delta > 0$,当$\| y - y_0 \| < \delta$时方程

$$f(x, y) = 0$$

在$\| x - x_0 \| < r$内有唯一的解$x = g(y)$,满足$x_0 = g(y_0)$,且$g(y)$在$\| y - y_0 \| < \delta$内有p阶连续导映射。

证明:作映射$\varphi: \Omega \to Z \times Y$,$\varphi(x, y) = (f(x, y), y)$。由假定知$\varphi$是有连续的$p$阶导映射,$\varphi(x_0, y_0) = (0, y_0)$,且

$$
\mathrm{d}\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ 0 & I \end{pmatrix} : (X \to Y) \to (Z \to Y)
$$

具有有界逆。依局部反函数定理，存在r、$\delta>0$，当$\|z\|<\delta$、$\|y-y_0\|<\delta$时方程

$$
\varphi(x, y) = (z, y)
$$

在$\|x-x_0\|<r$、$\|y-y_0\|<r$内有唯一具有p阶连续导映射的解。

命$z=0$，当$\|y-y_0\|<\delta$时有唯一的解$x=g(y)$，在$\|y-y_0\|<\delta$内为C^p映射，$x_0=g(y_0)$、$\varphi(g(y), y)=(0, y)$，即$f(g(y), y)=0$。

8 奥尔里奇空间

8.1 N函数

奥尔里奇空间属于巴拿赫空间，可用于处理非多项式型的非线性问题。

在某可测集G上的实值L^p空间($p>1$)的元素全体定义为

$$\left\{x(t) \,\middle|\, \int_G M(x(t))\mathrm{d}t < +\infty\right\}$$

式中$M(u)=|u|^p$、$u\in(-\infty,+\infty)$。当$M(u)$为一般实函数时上述集合就是推广的L^p空间。

定义8.1 若函数$M(u)$满足不等式

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{M(u)+M(v)}{2} \tag{8.1}$$

并对所有u、v成立，则称$M(u)$为凸函数；若式(8.1)对所有不同的u、v都不取等号，则称$M(u)$为严格凸函数；若对任意$\varepsilon>0$、$u_0>0$，存在$\delta>0$使对一切u、v，当

$$|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)>\varepsilon u_0$$

时有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2} \tag{8.2}$$

则称$M(u)$为一致凸函数。

当然定义8.1也可采用下述方法表述：

(1) $M(u)$为凸函数等价于对任给u、v、$a\in[0,1]$；

$$M[au+(1-a)v]\leqslant aM(u)+(1-a)M(v)$$

(2) $M(u)$为凸函数等价于对任给u_1、u_2、…、u_n，

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)\leqslant\frac{M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)}{n}$$

(3) $M(u)$为严格凸函数等价于当$u\neq v$、$a\in(0,1)$时

$$M[au+(1-a)v]<aM(u)+(1-a)M(v)$$

(4) $M(u)$为一致凸函数等价于对任给$\varepsilon'>0$、$u'_0>$、$[a,b]\subset(0,1)$，存在$\delta'>0$使对所有u、v及$\alpha\in[a,b]$，当

$$|u-v|\geqslant\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon' u'_0$$

时有

$$M[\alpha u+(1-\alpha)v]<(1-\delta')[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)]$$

定理8.1　当$M(u)$为严格凸函数时，其在任何有界闭区间上为一致凸函数。

证明：任给$\varepsilon>0$、$u_0>0$及有界闭区间I，因为$M(u)$在I上严格凸，所以函数

$$f(u,v)=\frac{M\left(\dfrac{u+v}{2}\right)}{\dfrac{M(u)+M(v)}{2}}$$

在紧集

$$\left\{(u,v)\,\middle|\,|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon u_0;u、v\in I\right\}$$

上最大值小于1。

定理8.2　当$M(u)$为严格凸函数时任给$K>0$、$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使对所有u、v，只要$|u|$、$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\varepsilon$，就有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

成立。

定理8.3　当$M(u)$为严格凸函数时任给$K>0$、$\varepsilon>0$和$[a,b]\subset(0,1)$，存在$\delta>0$使$\alpha\in[a,b]$，$|u|$、$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\varepsilon$，有

$$M[\alpha u+(1-\alpha)v]\leqslant(1-\delta)[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)]$$

定义8.2　满足下列条件的在$(-\infty,+\infty)$上的实函数$M(u)$称为N函数

(1) $M(u)$为偶的连续凸函数且$M(0)=0$；

(2) 当$u\neq0$时$M(u)>0$；

(3) $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{M(u)}{u}=0$、$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{M(u)}{u}=\infty$。

定理8.4　$M(u)$为N函数的充要条件是存在适合下列条件

的在$[0,+\infty]$上的实函数$p(u)$：

(1) 右导数$p_+(u)$右连续且非降；

(2) 当$u>0$时$p(u)>0$；

(3) $p(0)=0$、$p(\infty)=\infty$并符合

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)\mathrm{d}t \tag{8.3}$$

实际上，任给$u<w<v$，凸函数$M(u)$有不等式

$$\frac{M(w)-M(u)}{w-u}\leqslant\frac{M(v)-M(u)}{v-u}\leqslant\frac{M(v)-M(w)}{v-w} \tag{8.4}$$

成立。取$v=u+h_2$、$w=u+h_1(h_2>h_1>0)$，依式(8.4)的第一个不等式，

$$\frac{M(u+h_1)-M(u)}{h_1}\leqslant\frac{M(u+h_2)-M(u)}{h_2}$$

表明$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$关于$h>0$非减；同理$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$关于$h>0$非增。即$M(u)$的右导数$p_+(u)$及左导数$p_-(u)$对一切u均存在，再依式(8.4)的第一个不等式，

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}\leqslant\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$$

令$h\to0^+$使$p_-(u)\leqslant p_+(u)$。今证$p_+(u)$右连续且非降。

取$u<v$、$h>0$使$u+h<v-h$。对u、$u+h$、$v-h$和$u+h$、$v-h$、v分别应用式(8.4)，得

$$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}\leqslant\frac{M(v-h)-M(u+h)}{(v-h)-(u+h)}\leqslant\frac{M(v)-M(v-h)}{h}$$

命$h\to0$知$p_+(u)\leqslant p_-(v)\leqslant p_+(v)$，即$p_+(u)$非降。

注意到$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$的非减性，则对任意u_0及$h>0$

$$p_+(u_0+0)\leqslant\frac{M(u_0+h)-M(u_0)}{h}$$

对于$h\to0^+$有$p_+(u_0+0)\leqslant p_+(u_0)$。另一方面，因为$p(u)$非减，所以$p_+(u_0+0)\geqslant p_+(u_0)$，于是$p_+(u_0+0)=p_+(u_0)$，表明$p_+(u)$右连续。

根据实函数理论，式(8.3)成立。又从$p(t)$非减知当$u\geqslant 0$时(注意$M(0)=0$)

$$M(u)=\int_0^u p(t)\mathrm{d}t\leqslant up(u)$$

也就是

$$M(2u)=\int_0^{2u} p(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_u^{2u} p(t)\mathrm{d}t\geqslant up(u)\geqslant M(u)$$

足见

$$\frac{1}{2}p\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant\frac{M(u)}{u}\leqslant p(u)\qquad(u>0)\tag{8.5}$$

最后从式(8.5)、定义8.2知定理8.4(1)、(2)成立。

反之，依式(8.3)、定理8.4的(1)，对任意u、v可取$0\leqslant u\leqslant v$，有

$$\begin{aligned}M\left(\frac{u+v}{2}\right)&=\int_0^{\frac{u+v}{2}} p(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^u p(t)\mathrm{d}t+\\&\qquad\frac{1}{2}\left[\int_u^{\frac{u+v}{2}} p(t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{u+v}{2}}^v p(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{M(u)+M(v)}{2}\end{aligned}$$

故$M(u)$为凸的。从式(8.5)得到定义8.2的(1)、(2)、(3)。

利用$M(u)$的凸性与定义8.2的(3)知，对所有$u\neq 0$，有

$$M(\alpha u)<\alpha M(u)\qquad(0<\alpha<1)\tag{8.6}$$

$$M(\alpha u)>\alpha M(u)\qquad(\alpha>1)\tag{8.7}$$

对于$u>v>0$，取$\alpha=\dfrac{v}{u}$，依式(8.6)，

$$\frac{M(v)}{v}<\frac{M(u)}{u}\tag{8.8}$$

定义8.3 若$p(t)$满足定理8.4的(1)、(2)、(3)，则称

$$q(s)=\sup_{p(t)\leqslant s} t=\inf_{p(t)>s} t\tag{8.9}$$

为$p(t)$的右反函数。

定理8.5 $p(t)$的右反函数$q(s)$也适合定理8.4的(1)、(2)、(3)。

证明:(1) 显然$q(s)$非减。现证其右连续。否则,存在$s_n \downarrow s_0$使$q(s_n) \downarrow t_0 > q(s_0)$。命$t_1$满足$t_0 > t_1 > q(s_0)$,则

$$t_1 < q(s_n) = \sup_{p(t) \leqslant s_n} t$$

即$p(t_1) \leqslant s_n (n=1,2,\cdots)$,$p(t_1) \leqslant s_0$。也就是$t_1 \leqslant \sup\limits_{p(t) \leqslant s_0} t = q(s_0)$,矛盾。

(2) 若定理8.4(2)不真,则有$s_0 > 0$使$q(s_0)=0$,从而有$t_n \downarrow 0$且$p(t_n) > s_0$。但$p(t)$右连续,于是$p(t_n) \to p(0)=0$,有$n_0 \geqslant 1$当$n > n_0$时$p(t_n) \leqslant s_o$,矛盾。

(3) 显然。

定义8.4 若$M(u)$为N函数,$q(s)$为其右导数$p(t)$的右反函数,则称N函数

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) \mathrm{d}s$$

为$M(u)$为余N函数。

$M(u)$为严格凸函数的充要条件是$q(s)$连续,即$p(u)$为严格增加。对任何u、v,杨不等式

$$uv \leqslant M(u) + N(v) \tag{8.10}$$

当且仅当$u = q(|v|)\mathrm{sign}v$或$v = p(|u|)\mathrm{sign}u$时式(8.10)的等号成立,而

$$\begin{cases} |u| p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)] \\ |v| q(|v|) = M(v) + M[q(|v|)] \end{cases} \tag{8.11}$$

当$q(s)$为$p(t)$的右反函数时,$p(t)$也是$q(s)$的右反函数,表明$M(u)$、$N(v)$互为余N函数。

定理8.6 当$M(u)$为N函数时

$$M_1(u) = aM(bu) \qquad (a、b) > 0$$

也是N函数且其余函数为

$$N_1(v) = aN\left(\frac{v}{ab}\right) \tag{8.12}$$

其中$N(v)$为$M(u)$的余函数。

证 明:$M_1(u)$的右导数$p_1(t) = abp(bt)$,$p(t)$为$M(u)$的右导

数；$p_1(t)$的右反函数是

$$q_1(s)=\frac{1}{b}q\left(\frac{s}{ab}\right)$$

$q(s)$为$p(t)$的右反函数，从而

$$N_1(v)=\int_0^{|v|}q_1(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{b}\int_0^{|v|}q\left(\frac{s}{ab}\right)\mathrm{d}s=a\int_0^{\frac{|v|}{ab}}q(s)\mathrm{d}s=aN\left(\frac{v}{ab}\right)$$

定理 8.7 若两个N函数满足

$$M_1(u)\leqslant M_2(u)\qquad (u\geqslant u_0\geqslant 0)$$

则其对应的余函数关系为

$$N_1(v)\geqslant N_2(v)\qquad (q_2(v)\geqslant u_0)$$

证明：由式(8.10)、式(8.11)，当$v>0$时

$$M_2(q(v))+N_2(v)=vq_2(v)\leqslant N_1(q_2(v))+N_1(v)$$

注意到$M_2(q_2(v))\geqslant M_1(q_2(v))$，得

$$N_1(v)\geqslant N_2(v)$$

定义 8.5 称N函数$M_2(u)$快于$M_1(u)$，如果存在a、$b>0$，$u_0\geqslant 0$使

$$M_1(u)\leqslant aM_2(bu)\qquad (u\geqslant u_0)$$

若$M_2(u)$快于$M_1(u)$同时$M_1(u)$快于$M_2(u)$，则称$M_1(u)$、$M_2(u)$等价。

【例 8.1】 $M_1(u)=\dfrac{1}{\alpha}|u|^{\alpha}\qquad (\alpha>1)$

这时$p_1(t)=t^{\alpha-1}$、$q_2(s)=s^{\beta-1}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1\right)$，有

$$N_1(v)=\frac{1}{\beta}|v|^{\beta}$$

【例 8.2】 $M_2(u)=e^{|u|}-|u|-1$

这时$p_2(t)=e^t-1$、$q_2(s)=\log(s+1)$，有

$$N_2(v)=(1+|v|)\log(1+|v|)-|v|$$

定义 8.6 N函数$M(u)$满足Δ_2条件是指有$K>2$、$u_0\geqslant 0$使

$$M(2u)\leqslant KM(u)\qquad (u\geqslant u_0)\tag{8.13}$$

用$M(u)\in\Delta_2$表明$M(u)$满足Δ_2条件，用$M(u)\in\nabla_2$表示其余

函数$N(v)\in\Delta_2$，用$M(u)\in\nabla_2\cap\nabla_2$表示$M(u)\in\Delta_2$以及$M(u)\in\nabla_2$。$\Delta_2$条件在奥尔里奇空间中具有重要意义。为此提出$\Delta_2$的等价表述：

(1) $M(u)\in\Delta_2$

(2) 任给$l_1>1$、$u_1>0$，存在$K'>1$使

$$M(l_1u)\leqslant K'M(u)\qquad(u\geqslant u_1)\tag{8.14}$$

(3) 任给$l_2>1$、$u_2>0$，存在$\varepsilon\in(0,1)$使

$$M[(1+\varepsilon)u]\leqslant l_2M(u)\qquad(u\geqslant u_2)\tag{8.15}$$

(4) 任给$l_3>1$、$v_0>1$，存在$\delta>0$使

$$N(l_3v)\geqslant(l_3+\delta)N(v)\qquad(v\geqslant v_0)\tag{8.16}$$

(5) 存在$v_0>0$、$l_3>1$、$\delta>0$使式(8.16)成立

(6) 存在$v_0>0$、$p_0>1$、$l_4>1$使

$$\frac{1}{p_0l_4}N(l_4v)\geqslant N(v)\qquad(v\geqslant v_0)\tag{8.17}$$

定理8.8 若$M_2(u)$等价于$M_1(u)$、则当$M_2(u)\in\Delta_2$时$M_1(u)\in\Delta_2$。

$M(u)$的凸性与空间的凸性有关。一般而言，当$p(t)$非严格单调时$M(u)$不具有严格凸性。

定理8.9 对任何N函数$M(u)$以及$\varepsilon>0$，存在严格凸的N函数$M_1(u)$符合

$$M(u)\leqslant M_1(u)\leqslant(1+\varepsilon)M(u)$$

证明：依$p(t)$右连续和$p(\infty)=\infty$，使$p(t)$为常数的区间必呈$[a,b)$形式。其全体取为$\{[a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}$，若$p(b_1)>p(a_1)$，则对$b'_1=b_1$、$\beta_1=\min(p(b_1),(1+\varepsilon)p(a_1))$；若$p(b_1)=p(a_1)$，则$p(t)$在$b_1$处连续，这时选$b'_1>b_1$使$p(b'_1)<(1+\varepsilon)p(a_1)$。令$\beta=p_1(b'_1)$，并在$[a_1,b'_1)$上定义$p_1(t)$为通过平面上两点$(a_1,p(a_1))$、$(b'_1,\beta_1)$的直线段。显见$p_1(t)$严格增加且$p(t)\leqslant p_1(t)\leqslant(1+\varepsilon)p(t)$，$t\in[a_1,b'_1)$。再命$\{[a_k,b_k)\}$中第一个不包括在$[a_1,b'_1)$半开线节并以同样的方法在其上补充定义$p_1(t)$，…；最后在其他的点上定义$p_1(t)=p(t)$，易见$p_1(t)$严格增加并适

合 $p(t)\leqslant p_1(t\leqslant(1+\varepsilon)p(t),t\in[0,+\infty))$。对 $M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)\mathrm{d}t$，可验之满足定理要求。

定理 8.10 当 $M(u)\in\Delta_2$ 时存在与 $M(u)$ 等价的严格凸 N 函数 $M_1(u)$，且其余函数也是严格凸。

证明：假定式(8.13)对所有 u 成立，且 $M_1(u)=\int_0^{|v|}\frac{M(t)}{t}\mathrm{d}t$。因为 $\frac{M(t)}{t}(t>0)$ 严格增加、连续，所以 $M_1(u)$ 和其余函数均严格凸。现证它和 $M(u)$ 等价。实际上，由式(8.5)，

$$p(u)\geqslant\frac{M(u)}{u}\geqslant\frac{1}{K}\frac{M(2u)}{u}\geqslant\frac{1}{K}p(u)\quad(u>0)$$

将此式各项从 0 到 u 积分，得到 $M(u)\geqslant M_1(u)>\frac{1}{K}M(u)$，即 $M_1(u)$、$M(u)$等价。

定理 8.11 若任给 $\varepsilon>0$，存在 $K>1$ 使

$$p((1+\varepsilon)t)\geqslant Kp(t)\qquad(t\geqslant0)$$

则 $M(u)$ 一致凸。

证明：任给 $\varepsilon\in(0,1)$，取 $K>1$ 使

$$p((1+\frac{\varepsilon}{2})t)\geqslant Kp(t)\qquad(t\geqslant0)$$

对任意 u、v 满足 $|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)$；不失一般性，让 $u-v\geqslant\varepsilon u>\varepsilon v>0$，也就是 $(1-\varepsilon)u\geqslant v>0$。置

$$\varphi(t)=M(u)+M(t)-2M\left(\frac{u+t}{2}\right)\qquad(t\geqslant0)$$

由于几乎处处有

$$\varphi'(t)=M'(t)-M'\left(\frac{u+t}{2}\right)\leqslant0\qquad t\in[0,u]$$

故 $\varphi(t)$ 在 $[0,u]$ 上非增，从而

$$\varphi(v)\geqslant M(u)+M((1-\varepsilon)u)-2M\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u\right)$$

$$=\int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}^{u}p(t)\mathrm{d}t-\int_{(1-\varepsilon)u}^{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}p(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}^{u}\left[p(t) - p\left(t - \frac{\varepsilon}{2}u\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left[M(u) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)M(u)\right]$$

$$> \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - \frac{1}{K}\right)[M(u) + M(v)]$$

即

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[1-\frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{K}\right)\right][M(u)+M(v)]$$

表明$M(u)$为一致凸函数。

定理8.12 若$M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$,则存在与$M(u)$等价的一致凸$N$函数$M_1(u)$,且其余函数也一致凸。

证明:类似于定理8.10的证明,设对一切u成立,

$$(2+\delta)M(u)\leqslant M(2u)\leqslant KM(u) \qquad (K>2,\delta>0)$$

令

$$M_0(u) = \int_0^{|u|}\frac{M(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad M_1(u) = \int_0^{|u|}\frac{M_0(t)}{t}\mathrm{d}t$$

于是从定理8.10的证明知$M_1(u)$、$M(u)$等价。因为

$$\frac{1}{K}M(u) \leqslant M\left(\frac{u}{2}\right) \leqslant \int_0^{\left|\frac{u}{2}\right|}\frac{M\left(\frac{u}{2}\right)}{\left|\frac{u}{2}\right|}\mathrm{d}t \leqslant \int_{\left|\frac{u}{2}\right|}^{|u|}\frac{M(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant M_0(u)$$

$$= \int_0^{\left|\frac{u}{2}\right|}\frac{M(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{\left|\frac{u}{2}\right|}^{|u|}\frac{M(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant M\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2}M(u)$$

所以

$$L\leqslant\frac{M(t)}{M_0(t)}=\frac{tM'_0(t)}{M_0(t)}\leqslant K \qquad \left(L=\frac{4+2\delta}{4+\delta}>1\right)$$

把此式各项除以t再对t从u到θu积分,

$$\theta^L M_0(u)\leqslant M_0(\theta u)\leqslant\theta^K M_0(u) \qquad (\theta\geqslant 1)$$

对任意$\varepsilon>0$,依上式$M_1(u)$的右导数符合

$$p_1((1+\varepsilon)u)=\frac{M_0((1+\varepsilon)u)}{(1+\varepsilon)u}\geqslant\frac{(1+\varepsilon)^L M_0(u)}{(1+\varepsilon)u}$$

$$=(1+\varepsilon)^{L-1}\frac{M_0(u)}{u}=(1+\varepsilon)^{L-1}p_1(u)$$

表明 $p_1(u)$ 满足定理 8.11 的条件，也就是 $M_1(u)$ 为一致凸函数。

对于 $M_1(u)$ 的余函数 $N_1(v)$ 的右导数 $q_1(v)$，取

$$q_1((1+\varepsilon)v)=a(v)q_1(v) \qquad (v\geqslant 0)$$

于是 $a(v)>1$。记 $v=p_1(u)$，代入上式

$$(1+\varepsilon)p_1(u)=p_1(a(v)u)=\frac{M_0(a(v)u)}{a(v)u}\leqslant\frac{a^K(v)M_0(u)}{a(v)u}$$
$$=a^{k-1}(v)p_1(u)$$

结果 $a(v)\geqslant(1+\varepsilon)^{\frac{1}{K-1}}$。从 $q_1((1+\varepsilon)v)\geqslant(1+\varepsilon)^{\frac{1}{K-1}}q_1(v)$ 得到 $N_1(v)$ 为一致凸函数。

8.2 奥尔里奇空间定义

现以 G 表示 n 维欧几里德空间 E^n 中有界正测度闭集，以 $M(u)$、$N(v)$ 表示互余 N 函数，$u(t)$、$v(t)$、$w(t)$、…表示定义在 G 上的勒贝格可测实函数，以 $\rho_M(u)$ 表示 $u(t)$ 关于 $M(u)$ 的模 $\int_G M(u(t))\mathrm{d}t$。定义

$$L_M=\{u(t)\mid\rho_M(u)<+\infty\}$$

$$L_M^*=\left\{u(t)\,\middle|\,\text{存在 } a>0 \text{ 使 } \rho_M(au)<+\infty\right\}$$

$$E_M=\left\{u(t)\,\middle|\,\text{对任意 } a>0 \text{ 有 } \rho_M(au)<+\infty\right\}$$

显见

$$E_M\subseteq L_M\subseteq L_M^* \tag{8.18}$$

当 $M(u)\notin\Delta_2$ 时式(8.18)为真包含关系。

定理 8.13 L_M 为线性集当且仅当 $M(u)\in\Delta_2$。

定理 8.14 当 $M(u)\in\Delta_2$ 时 $E_M=L_M=L_M^*$。

实际上，对任何 $u\in L_M^*$，由 L_M^* 定义知，存在 $a>0$ 使 $au\in L_M$。对任意 $k>0$，依 Δ_2 条件的等价表述，有 $K>1$、$u_0>0$，当 $u\geqslant u_0$ 时 $M\left(\frac{k}{a}u\right)\leqslant KM(u)$，于是

$$\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t = \int_A M\left(\frac{k}{a}au(t)\right)\mathrm{d}t + \int_B M\left(\frac{k}{a}au(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant M\left(\frac{k}{a}u_0\right)m(G) + K\int_G M(au(t))\mathrm{d}t < +\infty$$

这里 m 表示测度，$A=G(|au(t)|\leqslant u_0)$、$B=G(|au(t)|>u_0)$，表明 $u\in E_M$，即 $E_M\supset L_M^*$。

对于 L_M 中的元素，有相当于公式

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)\leqslant\frac{M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)}{n}$$

的 Jensen 不等式。

定理 8.15 若 $u(t)\in L_M$，则

$$M\left(\frac{1}{m(G)}\int_G u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{m(G)}\int_G M(u(t))\mathrm{d}t \tag{8.19}$$

证明：命 $u(t)$ 在 G 上连续且 $|u(t)|\leqslant K\quad(t\in G)$。因为 $M(u)$ 在 $[0,K]$ 上一致连续，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当 $|u_1-u_2|<\delta$ 时 $|M(u_1)-M(u_2)|<\varepsilon$。

由于 $u(t)$ 在 G 上一致连续，故可将 G 分割为两点不相交的有限个等测度集 G_1、G_2、…、G_n，这样对 $t_i\in G_i$ 均有 $|u(t)-u(t_i)|<\delta(t\in G_i)(i=1,2,\cdots,n)$。推出

$$\left|\frac{1}{m(G)}\int_G u(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}u(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}u(t_i)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}|u(t)-u(t_i)|\mathrm{d}t\leqslant\delta$$

进一步分析，有

$$M\left(\frac{1}{m(G)}\int_G u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\right)+\varepsilon$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(u(t_i))+\varepsilon \tag{8.20}$$

又

$$\left|\frac{1}{m(G)}\int_G M(u(t))\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(u(t_i))\right|$$

$$=\frac{1}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i}[M(u(t))-M(u(t_i))]\mathrm{d}t\mid<\varepsilon \qquad (8.21)$$

从式(8.21)、式(8.20)，

$$M\left(\frac{1}{m(G)}\int_G u(t)\mathrm{d}t\right)<\frac{1}{m(G)}\int_G M(u(t))\mathrm{d}t+2\varepsilon$$

依ε的任意性，式(8.19)成立。

对L_M中的一般元素$u(t)$，利用式(8.10)，

$$\int_G|u(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_G M(u(t))\mathrm{d}t+N(1)m(G)<+\infty$$

表明存在连续数列$\{u_n(t)\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_G|u(t)-u_n(t)|\mathrm{d}t=0$$

注意到式(8.19)对所有$u_n(t)$成立，两边对n取极限就得到式(8.19)对$u(t)$也成立。

对任意$u\in L_M^*$(奥尔里奇空间)，定义

$$\|u\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right|$$

易知$\|\cdot\|_M$为L_M^*上的范数，称为奥尔里奇范数。

可以证明$\{L_M^*,\|\cdot\|_M\}$为巴拿赫空间。在L_M^*中的基本列$\{u_n\}$，依定义

$$\int_G|u_n(t)-u_m(t)||v(t)|\mathrm{d}t\to 0 \qquad (n、m\to\infty)$$

对所有满足$\rho_N(v)\leqslant 1$的$v(t)$一致成立。据此，$\{u_n(t)\}$度量收敛，从而存在子列$a.e.$收敛：

$$u_{n_k}\xrightarrow{a.e.}u_0(t) \qquad (k\to\infty)$$

任给$\varepsilon>0$，当k充分大时

$$\int_G |u_{k+p}(t) - u_{n_k}(t)| |v(t)| \mathrm{d}t < \varepsilon \qquad (p \geqslant 1)$$

对一切满足 $\rho_N(v) \leqslant 1$ 的 v 一致成立。当 $p \to \infty$ 时对所有 $v \in L_N^*$，$\rho_N(v) \leqslant 1$ 一致地有

$$\int_G |u_0(t) - u_{n_k}(t)| |v(t)| \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \qquad (k \geqslant k_0)$$

表明 $\| u_{n_k} - u_0 \|_M \leqslant \varepsilon$。又因 $\| u_{n_k} - u_m \|_M \to 0 (k、m \to \infty)$ 以及 ε 的任意性，有 $\| u_n \to u_0 \|_M \to 0 (n \to \infty)$。当然，$u \in L_M^*$ 是显然的

定理 8.16 (1) 当 $1 \leqslant \rho_N(v) < +\infty$ 时

$$\left| \int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \rho_N(v) \| u \|_M \quad (u \in L_M^*) \qquad (8.22)$$

(2) 当 $\| u \|_M \leqslant 1$ 时

$$\int_G N[p(|u(t)|)] \leqslant 1$$

证明：(1) 因为 $0 < \dfrac{1}{\rho_N(v)} \leqslant 1$，依 $N(au) \leqslant aN(u) (0 \leqslant a \leqslant 1)$，所以

$$\rho_N\left(\frac{v}{\rho_N(v)} \right) = \int_G N\left(\frac{v(t)}{\rho_N(t)} \right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{\rho_N(v)}{\rho_N(v)} = 1$$

得到

$$\left| \int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t \right| = \rho_N(v) \left| \int_G u(t) \frac{v(t)}{\rho_N(v)} \mathrm{d}t \right| \leqslant \rho_N(v) \| u \|_M$$

(2) 令

$$u_n(t) = \begin{cases} u(t) & |u(t)| \leqslant n \\ 0 & |u(t)| > n \end{cases}$$

于是 $|u_n(t)| \uparrow |u(t)|$，且

$$\int_G N[p(|u(t)|)]\mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \int_G N[p(|u_n(t)|)]\mathrm{d}t$$

若(2)不成立，则存在充分大的 n_0 使

$$\int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]\mathrm{d}t > 1$$

从式(8.11)、式(8.22)，

$$\begin{aligned}\int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]\mathrm{d}t &< \int_G |u_{n_0}(t)|p[p(|u_{n_0}(t)|)]\mathrm{d}t \\ &\leqslant \rho_N(p(|u_{n_0}(t)|))\,\|u_{n_0}\|_M \\ &\leqslant \int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这是矛盾的。

定理 8.17 当 $\|u\|_M\leqslant 1$ 时 $\rho_N(u)\leqslant\|u\|_M$。

【例 8.3】 特征函数 $X_E(t)$ 的范数。

设 $E\subset G$ 为正测度集。任取 $v\in L_N$、$\rho_N<1$，由 Jensen 不等式

$$N\left(\frac{1}{m(E)}\left|\int_E v(t)\mathrm{d}t\right|\right)\leqslant\frac{1}{m(E)}\rho_N(v)\leqslant\frac{1}{m(E)}$$

结果

$$\left|\int_E v(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant m(E)N^{-1}\left(\frac{1}{m(E)}\right)$$

$N^{-1}(u)$ 为 $N(v)$ 的反函数，导出

$$\|X_E\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left|\int_E v(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant m(E)N^{-1}\left(\frac{1}{m(E)}\right)$$

而

$$\rho_N\left(N^{-1}\left(\frac{X_E}{m(E)}\right)\right)=\int_G\frac{X_E(t)}{m(E)}\mathrm{d}t=1$$

所以

$$\|X_E\|_M\geqslant\int_G N^{-1}\left(\frac{1}{m(E)}\right)X_E(t)\mathrm{d}t=N^{-1}\left(\frac{1}{m(E)}\right)m(E)$$

并有

$$\|X_E\|_M=N^{-1}\left(\frac{1}{m(E)}\right)m(E)\tag{8.23}$$

利用式(8.23)，

$$\lim_{m(E)\to 0}\|X_E\|_M=\lim_{u\to\infty}\frac{N^{-1}(u)}{u}=\lim_{v\to\infty}\frac{v}{N(v)}=0\tag{8.24}$$

【例 8.4】 $M(u)=\frac{1}{p}|u|^p(p>1)$ 的 L_M^* 的范数 $\|\cdot\|_M$。任取

$u \in L_M^*$、$v \in L_N^*$，$\rho_N(v) \leqslant 1$，由 Hölder 不等式得

$$\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q \leqslant q^{\frac{1}{q}} \|u\|_p$$

故 $\|u\|_M \leqslant q^{\frac{1}{q}} \|u\|_p$。

另外，置

$$v_0(t) = q^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} |u(t)|^{p-1} \mathrm{sign}[u(t)]$$

验证知 $\rho_N(v_0) = \dfrac{1}{q}\int_G |v_0(t)|^q \mathrm{d}t = 1$，因此

$$\|u\|_M > \left|\int_G u(t)v_0(t)\mathrm{d}t\right| = q^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_G |u(t)|^p \mathrm{d}t$$
$$= q^{\frac{1}{q}} \|u\|_p$$

表明 $\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_p$ 相差一个常数因子 $q^{\frac{1}{q}}$。

定理 8.18 （1）在 L_M^* 中按模有界点集依范数有界；

（2）当 $M(u) \in \Delta_2$ 时依范数有界集按模有界。

证明：（1）当 $u \in L_M$、$\rho_N(v) \leqslant 1$ 时

$$\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \rho_M(u) + \rho_N(v) \leqslant \rho_M(u) + 1$$

有

$$\|u\|_M \leqslant \rho_M(u) + 1$$

（2）设 $B \subset L_M^*$ 依范数有界，即存在 $p > 0$ 使当 $u \in B$ 时 $\|u\|_M \leqslant p$。取 $u_0 \geqslant 0$、$K \geqslant 1$，当 $u \geqslant u_0$ 时 $M(pu) \leqslant KM(u)$。对任何 $u \in B$，由定理 8.17，$\rho_M\left(\dfrac{u}{p}\right) \leqslant \left\|\dfrac{u}{p}\right\|_M \leqslant 1$。从而

$$\rho_M(u) = \int_A M(u(t))\mathrm{d}t + \int_B M\left(p\frac{u(t)}{p}\right)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M(pu_0)m(G) + K\int_G M\left(\frac{1}{p}u(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M(pu_0)m(G) + K$$

式中 $A = G(|u(t)|)^G \leqslant pu_0$、$B = G(|u(t)|) > pu_0$。

定理 8.19 （1）依范数收敛蕴涵按模收敛；

(2) 按模收敛蕴涵依范数收敛的充要条件为$M(u)\in\Delta_2$。

定理 8.20 若$u\in L_M^*$、$v\in L_N^*$，则

$$\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant \|u\|_M\|v\|_N \tag{8.25}$$

事实上，由定理8.17，当$v\neq\theta$时$\rho_N\left(\frac{v}{\|v\|_N}\right)\leqslant 1$，有

$$\|u\|_M\geqslant\left|\int_G u(t)\frac{v(t)}{\|v\|_N}\mathrm{d}t\right|$$

即式(8.25)成立。

定理8.21 任何$u\in L_M$到D的距离$d(u,D)\leqslant 1$，其中D为按$\|\cdot\|_M$的闭包。

证明：对$\varepsilon>0$，取n使$\rho_N(u_n)>\rho_M(u)-\varepsilon$，而

$$u_n(t)=\begin{cases}u(t) & |u(t)|\leqslant n\\ 0 & |u(t)|>n\end{cases} \tag{8.26}$$

因为$u_n\in D$，所以从杨不等式

$$\begin{aligned}d(u,D)&\leqslant\|u-u_n\|_M\leqslant 1+\rho_M(u-u_n)\\&=1+\rho_M(u)-\rho_M(u_n)<1+\varepsilon\end{aligned}$$

表明$d(u,D)\leqslant 1$。

定理 8.22 L_M^*的线性子空间E_M等于G上一切有界可测函数的集按$\|\cdot\|_M$的闭包D，即$E_M=D$。

证明：若有$u\in E_M$，则对任何$k\geqslant 1$，$ku\in L_M$。由定理8.21，$d(ku,D)\leqslant 1$或$d(u,D)\leqslant\frac{1}{k}$。注意到$k$的任意性，$d(u,D)=0$；而$D$为闭的，于是$u\in D$。

反之，若$u\in D$，则对任何$k\geqslant 1$，有$2ku\in D$。而存在有界函数$w(t)$使$\|2ku-w\|_M\leqslant 1$。应用定理8.17，$\rho_M(2ku-w)\leqslant 1$；根据$M(u)$的凸性，

$$\rho_M(ku)\leqslant\frac{1}{2}\rho_M(2ku-w)+\frac{1}{2}\rho_M(w)<+\infty$$

也就是$u\in E_M$。

定义8.7 设$u\in L_M^*$。若$\lim\limits_{m(E)\to 0}\|uX_E\|=0$，则称$u$是范数绝对

连续的。

事实上，下列命题等价：① $u\in E_M$；② $\| u-u_n \|_M \to 0(n\to\infty)$，而 u_n 的定义同式(8.26)；③ u 是范数绝对连续的。

因为 $E_M=D$ 且 E_M 中的元素为范数绝对连续，利用ЛЧZИН定理知连续函数类在 E_M 中稠，所以 E_M 是可分的。一般情况下，L_M^* 不可分。可以断言：L_M^* 可分的充要条件为 $M(u)\in\Delta_2$。

定理 8.23 $L_{M_1}^*\subset L_{M_2}^*$ 的充要条件是 $M_1(u)$ 快于 $M_2(u)$；这时存在 $\beta>0$ 使 $\| u \|_{M_2}\leqslant\beta\| u \|_{M_1}(u\in L_{M_1}^*)$。

证明：充分性。取 a、$b>1$，$u_0\geqslant 0$，当 $u\geqslant u_0$ 时 $M_2(u)\leqslant aM_1(bu)$。对任何 $u\in L_M^* L_{M'}^*$，有 $\varepsilon>0$ 使 $\rho_{M_1}(\varepsilon u)<+\infty$，于是

$$\int_G M_2\left(\frac{\varepsilon}{b}u(t)\right)\mathrm{d}t\leqslant M_2(u_0)m(G)+a\int_G M_1(\varepsilon u(t))\mathrm{d}t<+\infty$$

且 $u\in L_{M_2}^*$。

必要性。若 $M_1(u)$ 不快于 $M_2(u)$，则有正序列 $u_n\uparrow\infty$ 使 $M_2(u_n)>M_1(2^n nu_n)(n=1,2,\cdots)$。令 G 的一个两两不相交子集列 $\{G_n\}$ 适合

$$m(G_n)=\frac{M_1(u_1)m(G)}{2^n M_1(nu_n)}$$

考察函数

$$u(t)=\begin{cases} nu_n & t\in G_n \\ 0 & t\in G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n \end{cases}$$

注意到

$$\int_G M_1(u(t))\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}M_1(nu_n)m(G_n)=M_1(u_1)m(G)<+\infty$$

因此 $u\in L_{M_1}\subset L_{M_1}^*$。但对于任何 $\lambda>0$，存在 $m>\frac{1}{\lambda}$，而

$$\begin{aligned}\int_G M_2(\lambda u(t))\mathrm{d}t &> \sum_{n=m}^{\infty}M_2(\lambda nu_n)m(G_n)>\sum_{n=m}^{\infty}M_2(u_n)m(G_n)\\ &> \sum_{n=m}^{\infty}M_1(2^n nu_n)\frac{M_1(u_1)m(G)}{2^n M_1(nu_n)}\end{aligned}$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_1)m(G) = \infty$$

表明$u \notin L_{M_2}^*$，矛盾。

最后，设$M_2(u) \leqslant aM_1(bu)(u \geqslant u_0)$。置

$$\lambda = a + M_2(u_0)m(G) + 1$$

对于$u \in L_{M_1}^*$，依定理8.17，有

$$\int_G M_2\left(\frac{u(t)}{\lambda b \| u \|_{M_1}}\right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_G M_2\left(\frac{u(t)}{b \| u \|_{M_1}}\right) \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left[M_2(u_0)m(G) + a\int_G M_1\left(\frac{u(t)}{\| u \|_{M_1}}\right) \mathrm{d}t\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}[M_2(u_0)m(G) + a] < 1$$

应用杨不等式，得到$\left\| \dfrac{u}{\lambda b \| u \|_{M_1}} \right\|_{M_2} \leqslant 2$。取$\beta = 2\lambda b$，即$\| u \|_{M_2} \leqslant \beta \| u \|_{M_1}$。

8.3 范数计算

奥尔里奇空间L_M^*是由$M(u)$唯一确定，但其范数$\| \cdot \|_M$与$M(u)$并无直接关系，也就是不易通过$M(u)$研究范数。

定理8.24 若有$k_0 > 0$使

$$\int_G N[p(k_0|u(t)|)]\mathrm{d}t = 1 \tag{8.27}$$

则

$$\| u \|_M = \int_G |u(t)| p(k_0|u(t)|)\mathrm{d}t \tag{8.28}$$

证明：依式(8.27)，得

$$\| u \|_M \geqslant \int_G |u(t)| p(k_0|u(t)|)\mathrm{d}t$$

另一方面，由式(8.27)、式(8.11)杨不等式为等号情况，即

$$\| u \|_M = \frac{1}{k_0} \sup_{\rho_N(v) \leqslant 1} \left| \int_G u(t) k_0 v(t) \mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{k_0}\left[1 + \int_G M(k_0 u(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{k_0}\left\{\int_G [p(k_0|u(t)|)]\mathrm{d}t + \int_G M(k_0 u(t))\mathrm{d}t\right\}$$

$$= \frac{1}{k_0}\int_G p(k_0|u(t)|)k_0|u(t)|\mathrm{d}t$$

$$= \int_G |u(t)|p(k_0|u(t)|)\mathrm{d}t$$

表明式(8.28)成立。

定理8.25 对任何$u\in L_M^*$,有

$$\| u \|_M = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1 + \int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right] \tag{8.29}$$

证明:不妨取$u\neq\theta$。

(1) 先命$p(t)$连续、$u(t)$有界。这时k的函数

$$\int_G N(p(k|u(t)|))\mathrm{d}t$$

在[0,+∞)上连续且在零点为零、在无穷远点为无穷大,故必存在$k_0>0$使

$$\int_G N(p(k_0|u(t)|))\mathrm{d}t = 1$$

利用定理8.24、式(8.11),有

$$\| u \|_M = \frac{1}{k_0}\int_G p(k_0|u(t)|)|k_0 u(t)|\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{k_0}\left[1 + \int_G M(k_0 u(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$\geqslant \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1 + \int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right]$$

对任何$k>0$,依杨不等式

$$\| u \|_M \leqslant \frac{1}{k}\left[1 + \int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right]$$

于是

$$\| u \|_M \leqslant \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right] \tag{8.30}$$

这样式(8.29)成立。

(2) 只需设 $p(t)$ 连续，$u \in L_M^*$。对任意正整数 n，按式(8.26)，$u_n(t)$ 有界；依(1)，存在 k_n 使

$$\int_G N[p(k_n|u_n(t)|)]\mathrm{d}t = 1$$

$$\| u_n \|_M = \frac{1}{k_n}\left[1 + \int_G M(k_n u_n(t))\mathrm{d}t\right]$$

从第一式知 $\left\{\frac{1}{k_n}\right\}$ 非减。再从

$$\frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n}\left[1 + \int_G M(k_n u_n(t))\mathrm{d}t\right] = \| u_n \|_M \leqslant \| u \|_M$$

知 $\left\{\frac{1}{k_n}\right\}$ 有极限 $\frac{1}{k_0}$。令 $n \to \infty$，得

$$\| u \|_M \geqslant \frac{1}{k_0}\left[1 + \int_G M(k_0 u(t))\mathrm{d}t\right]$$

注意到式(8.30)推出式(8.29)。

(3) 一般情形。对任给 $\varepsilon > 0$，由定理8.9，存在严格凸的 N 函数 $N_1(v)$，让

$$N(v) \leqslant N_1(v) \leqslant (1+\varepsilon)N(v) \tag{8.31}$$

据此，$N_1(v)$ 的余函数 $M_1(v)$ 的右导数 $p_1(t)$ 连续并从定理8.6、定理8.7知

$$M(u) \geqslant M_1(u) \geqslant (1+\varepsilon)M\left(\frac{u}{1+\varepsilon}\right) \tag{8.32}$$

由式(8.31)，

$$\begin{aligned} \sup_{A_1}\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sup_{A_2}\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \\ \leqslant \sup_{A_3}\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sup_{A_4}\left|\int_G u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \\ = \sup_{A_1}\left|\int_G u(t)(1+\varepsilon)v(t)\mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$

即

$$\| u \|_{M_1} \leqslant \| u \|_M \leqslant (1+\varepsilon) \| u \|_{M_1} \tag{8.33}$$

其中 $A_1=\rho_{N_1}(v)\leqslant 1$、$A_2=\rho_N(v)\leqslant 1$、$A_3=\rho_{N_1}(v)\leqslant 1+\varepsilon$、$A_4=\rho_{N_1}\left(\frac{v}{1+\varepsilon}\right)\leqslant 1$。又从式(8.32)及(2)

$$\begin{aligned}
&\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1+\frac{1}{1+\varepsilon}\int_G M_1(k(1+\varepsilon)u(t))\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant (1+\varepsilon)\| u \|_{M_1} \\
&= (1+\varepsilon)\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1+\int_G M_1(ku(t))\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant (1+\varepsilon)\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right]
\end{aligned} \tag{8.34}$$

结合式(8.34),并考虑 ε 的任意性知式(8.29)成立。

可以证明:式(8.29)中的下确界可以达到

定义记号

$$k^* = k^*(u) = \inf\left\{k>0 \,\middle|\, \int_G N[p(k|u(t)|)]\mathrm{d}t \geqslant 1\right\}$$

$$k^{**} = k^{**}(u) = \sup\left\{k>0 \,\middle|\, \int_G N[p(k|u(t)|)]\mathrm{d}t \leqslant 1\right\}$$

这里 $u\in L_M^*$。对任意 u,$k^*\leqslant k^{**}$。

定理 8.26 当且仅当 $k\in[k^*,k^{**}]$ 时

$$\| u \|_M = \frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right] \quad (u\neq\theta) \tag{8.35}$$

证明:依定理 8.25,只需考虑当且仅当 $k\in[k^*,k^{**}]$ 时

$$L(k)=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right] \quad (k>0)$$

达到极小值。

以 Ω 表示 $L(k)$ 的定义域,先证 $L(k)$ 存在最小值。显然 $L(k)$ 在 Ω 上连续。若 $\Omega=(0,+\infty)$,则 $L(0)=L(+\infty)=+\infty$,且 $\inf L(k)$

可达；若$\Omega=(0,b]$，则由Levy定理，有$L(b-0)=+\infty$，且$\inf L(k)$可达；若$\Omega=(0,b]$，则$\inf L(k)$也可达。

再讨论$k^{**}\in\Omega$。对任何$k\in(0,k^{**})$，按k^{**}定义，

$$\int_G N[p(k|u(t)|)]\mathrm{d}t\leqslant 1$$

推出

$$\left|\int_G |u(t)|p(k|u(t)|)\mathrm{d}t\right|\leqslant \|u\|_M$$

利用杨不等式等号情况，

$$\begin{aligned}L(k)&\leqslant\frac{1}{k}\left[1+\int_G k|u(t)|p(k|u(t)|)\mathrm{d}t\right]\\&\leqslant\frac{1}{k}+\|u\|_M<+\infty\end{aligned}$$

又用Fatou定理

$$L(k^{**})\leqslant\frac{1}{k^{**}}+\|u\|_M<+\infty$$

对于$k<k^*$，$L(k)$的右导数为

$$\begin{aligned}L_+(k)&=-\frac{1}{k^2}\left[1+\int_G M(ku(t))\mathrm{d}t\right]+\frac{1}{k}\int_G p(k|u(t)|)|u(t)|\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{k^2}\left[\int_G N(p(k|u(t)|))\mathrm{d}t-1\right]<0\end{aligned}$$

于是k不是$L(k)$的极小点。

当$k>k^{**}$时取$k'\in(k^{**},k)$，有

$$\begin{aligned}&L(k)-L(k')\\&=\frac{k-k'}{kk'}\left\{-1+\frac{k'}{k-k'}\int_G[M(ku(t))-M(k'u(t))]\mathrm{d}t\right.\\&\quad\left.-\int_G M(k'u(t))\mathrm{d}t\right\}\\&=\frac{k-k'}{kk'}\left\{\int_G N[p(k'|u(t)|)]\mathrm{d}t-1\right\}>0\end{aligned}$$

表明k不是$L(k)$的极小点。

如果$k^*=k^{**}$，那么从上面讨论知，它是$L(k)$的极小点；如果k_0

$\in(k^*, k^{**})$，那么从 k^*、k^{**} 的定义知，这时

$$\int_G N[p(k_0|u(t)|)]\mathrm{d}t = 1$$

根据定理8.23的证明，$L(k_0)=\|u\|_M=\inf\limits_{k>0}L(k)$。又依Levy定理，

$$L(k^{**})=\lim L(k)=\inf_{k>0}L(k)$$

$$L(k^*)=\lim L(k)=\inf_{k>0}L(k)$$

这里 a^- 表示 $k\to k^{**}-0$、a^+ 表示 $k\to k^*+0$。

定理8.27 集合

$$K=\left\{k\,\middle|\,\|x\|_M=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(kx(t))\mathrm{d}t\right], a\leqslant\|x\|_M\leqslant b\right\}$$

对任何 $b\geqslant a>0$ 为有界集的主要条件是 $M(u)\in\nabla_2$。

证明：充分性。记 $u_0=M^{-1}\left(\dfrac{1}{2m(G)}\right)$。由 Δ_2 条件的等价表述知有 $p>1$、$l>1$，当 $u\geqslant u_0$ 时 $M(lu)\geqslant plM(u)$。

对于 $b\geqslant a>0$、k、$x\in L_M^*$，满足

$$a\leqslant\|x\|_M=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(kx(t))\mathrm{d}t\right]\leqslant b$$

利用定理8.25，

$$a\leqslant\|x\|_M\leqslant\frac{a}{2}\left[1+\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)\mathrm{d}t\right]$$

导出 $\displaystyle\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)\mathrm{d}t\geqslant 1$，于是

$$\int_g M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)\mathrm{d}t\geqslant\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)\mathrm{d}t-M(u_0)m(G)\geqslant\frac{1}{2}$$

式中 $g=G\left(\dfrac{2}{a}|x(t)|\geqslant u_0\right)$。

假定 $k>\dfrac{2}{a}l$。取正整数 i 使 $l^i<\dfrac{1}{2}ak\leqslant l^{i+1}$。再用 $M(lu)\geqslant plM(u)(u\geqslant u_0)$，得 $M(l^iu)\geqslant p^il^iM(u)(u\geqslant u_0)$，

$$b\geqslant\|x\|_M=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(kx(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$\geqslant \int_g \frac{1}{k} M\left(\frac{1}{2} ak \frac{2}{a} x(t) \right) \mathrm{d}t > \int_g \frac{1}{k} p^i l^i M\left(\frac{2}{a} x(t) \right) \mathrm{d}t$$

$$> \frac{1}{k} p^i l^i \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} p^i l^i \frac{a}{2l^{i+1}} = \frac{a}{4l} p^i$$

表明$i < \log_p\left(\frac{4lb}{a}\right)$，因此

$$k \leqslant \frac{2}{a} l^{1+\log_p\left(\frac{6lb}{a}\right)}$$

必要性。如果$M(u) \notin \nabla_2$，那么依Δ_2条件的等价表述，存在$l_n \uparrow \infty$、$u_n \uparrow \infty$、$l_1 \geqslant 2$、$M(u_1)m(G) \geqslant \frac{1}{2}$使

$$M(l_n u_n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) l_n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

对每个正整数n，选G的一个子集G_n，使得恒有$M(u_n)m(G_n) = \frac{1}{2}$；并置$x_n(t) = x_{G_n}(t)$，应用定理8.25、定理8.16，

$$\frac{1}{2} = \rho_M(x_n) \leqslant \| x_n \|_M \leqslant \frac{1}{l_n}\left[1 + \int_G M(l_n x_n(t)) \mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n} M(l_n u_n) m(G_n) < \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) l_n M(u_n) m(G_n)$$

$$= \frac{1}{l_n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

当k_n适合$\| x_n \|_M = \frac{1}{k_n}\left[1 + \int_G M(k_n x_n(t)) \mathrm{d}t\right]$时，依上述的不等式，对充分大的$n$有$k_n > 1$，故

$$\frac{1}{l_n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \| x_n \|_M = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n} M(k_n u_n) m(G_n)$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n} + M(u_n) m(G_n) = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{2}$$

令$n \to \infty$，得到$k_n \to \infty$，必要性得证。

9 广义函数

9.1 形式傅里叶级数

给定一个收敛的傅里叶级数

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) \tag{9.1}$$

就存在一个圆内的调和函数。

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\rho^n \quad (0 \leqslant \rho < 1) \tag{9.2}$$

反之，若式(9.2)对任意满足$\rho\in[0,1)$的ρ收敛，如式(9.2)收敛，则称式(9.1)定义了一个广义函数。因为调和函数无穷可微，所以广义函数也无穷可微。

形式傅里叶级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$可定义为广义函数，记作$u(\theta)$。

约定$\sum\limits_{n}$代表$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}$、$\sum\limits_{n}^{*}$代表$\sum\limits_{n}$中除去一项$n=0$。

令

$$v(\theta) = \sum_n b_n e^{in\theta}$$

对任意复数λ、μ，形式傅里叶级数

$$\lambda u(\theta) + \mu v(\theta) = \sum_n (\lambda a_n + \mu b_n)e^{in\theta}$$

也是广义函数。广义函数组成线性集合。两个广义函数的乘积未必收敛，但当$\sum\limits_n a_n\,\overline{b_n}$或收敛或可和时称之为广义函数$u(\theta)$、$\overline{v(\theta)}$的内积，记作$(u(\theta),\overline{v(\theta)})$，显然

$$(u(\theta),\overline{v(\theta)}) = \overline{(v(\theta),\overline{u(\theta)})}$$

$(\lambda u_1(\theta)+\mu u_2(\theta),\overline{v(\theta)})=\lambda(u_1(\theta),\overline{v(\theta)})+\mu(u_2(\theta),\overline{v(\theta)})$且$(u(\theta),\overline{e^{in\theta}})=a_n$。定义

$$(u(\theta),\overline{v(\theta-\psi)}) = (u(\theta+\psi),\overline{v(\theta)}) = \sum_n a_n \overline{b_n}\, e^{in\psi}$$

为广义函数$u(\theta)$、$v(\theta)$的卷积。称广义函数

$$\delta(\theta) = \sum_n e^{in\theta}$$

为狄拉克函数，其使

$$(u(\theta),\overline{\delta(\theta-\psi)}) = \sum_n a_n e^{in\psi} = u(\psi)$$

为方便，也将$\delta(\theta-\psi)$记作$\delta_\psi(\theta)$。广义函数$u(\theta)$的导数$u'(\theta)$定义为

$$u'(\theta) = i\sum_n n a_n e^{in\theta}$$

显见

$$(u'(\theta),\overline{v(\theta)}) = i\sum_n n a_n \overline{b_n} = -\sum_n a_n \overline{(inb_n)} = -(u(\theta),\overline{v'(\theta)})$$

推出

$$(u(\theta),\overline{\delta'(\theta-\psi)}) = -\overline{(u'(\theta),\delta(\theta-\psi))} = -u'(\psi)$$

$$(u(\theta),\overline{\delta^{(l)}(\theta-\psi)}) = -(-1)^l u^{(l)}(\psi)$$

9.2 *H* 型和*S* 型广义函数

今讨论两类特殊的广义函数。

如果系数a_n符合

$$\max\{\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}},\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_{-n}|^{\frac{1}{n}}\}\leqslant 1$$

那么称其对应的广义函数为H型(类)广义函数。H型广义函数构成线性集合；H型广义函数的导数仍为H型广义函数，两个H型广义函数的卷积仍为H型广义函数。

如果存在整数p使$a_n=O(|n|^p)$，那么称其对应的广义函数为S型(类)广义函数。S型广义函数为H型广义函数；S型广义构成线性集合而且导数运算、卷积运算是封闭的。

在H型广义函数之间定义“加法”和“卷积”，当把“卷积”视为“乘法”时所有H型广义函数成环。定义

$$u(\theta) + v(\theta) = \sum_n (a_n + b_n) e^{in\theta}$$

$$u(\theta) * v(\theta) = (u(\psi), v(\theta - \psi)) = \sum_n a_n b_n e^{in\theta}$$

它们满足交换性、结合性、分配性。该环的单位元是

$$\delta(\theta) = \sum_n e^{in\theta}$$

且

$$\lambda u(\theta) = (u(\theta), \lambda\delta(\psi - \theta))$$

$e^{in\theta}$为幂等元，也就是$e^{in\theta} * e^{in\theta} = e^{in\theta}$。这些幂等元相互正交；当$m \neq n$时$e^{im\theta} * e^{in\theta} = 0$；幂等元的和是单位元$\delta(\theta)$。同理分析$S$型广义函数。

两类广义函数T、$\mathring{T}$ 当满足下列条件时称为相互对偶：

(1) 对$u \in T$、$v \in \mathring{T}$ 常数收敛；

(2) 若$(u, \bar{v})$对所有$u \in T$，$(u, \bar{v})$常数收敛，则有$v \in \mathring{T}$；

(3) 若$(u, \bar{v})$对所有$v \in \mathring{T}$ 常数收敛，则$u \in T$。

定理9.1 设$\varphi(n)$为正的增函数，当$n \to \infty$时$\varphi(n) \to \infty$，且设对任意$\delta > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\varphi(n)]^{\delta}}$常数收敛。取$T$为满足

$$\log |a_n| = o(\log \varphi(n))$$

的广义函数组成的类；$\mathring{T}$ 为满足

$$\log \varphi(|n|) = O(\log \frac{1}{|b_n|})$$

的广义函数组成的类；于是在T、$\mathring{T}$ 之间存在对偶关系。

证明：(1) 依定义，对任意$\varepsilon > 0$，当$n \to \infty$时

$$|a_n| \leqslant [\varphi(|n|)]^{\varepsilon}$$

对$c > 0$使

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{[\varphi(|n|)]^c}$$

表明 $\sum_n a_n \overline{b_n}$ 收敛。

(2) 设 $l \notin \mathring{T}_0$，则有数列 n_l 使

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\log\varphi(|n_l|)}{\log\frac{1}{|b_{n_l}|}}=\infty$$

取 $a_{n_l}=\frac{1}{b_{n_l}}$、$a_n=0$，这样定义广义函数 $u(\theta)\in T$，但 $\sum_n a_n \overline{b}_n$ 发散。

(3) 设 $u \notin T$，有数列 n_l 使

$$\log|a_{n_l}|\geqslant c\log\varphi(|M_l|) \qquad (c>0)$$

取 $b_{n_l}=\frac{1}{a_{n_l}}$、$b_n=0$，这样定义的广义函数 $v(\theta)\in\mathring{T}$，但 $\sum_n a_n \overline{b}_n$ 发散。

在定理 9.1 中以 $\varphi(n)=e^n$，这样类 T 变为类 H。依

$$\log|a_n|=o(|n|)$$

得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$$

又

$$|n|=O\left(\log\frac{1}{|b_n|}\right)$$

与之关系等价

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{|n|}}<1$$

定理 9.2 H 类的对偶类 $\mathring{H}$ 为符合以下条件的广义函数组成，

$$\max\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}},\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_{-n}|^{\frac{1}{n}}\right\}<1$$

定理 9.3 G_p 为满足

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|a_n|^{|n|^{-p}}\leqslant 1$$

的广义函数组成的类，其对偶类 $\mathring{G}_p$ 也是满足

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|b_n|^{|n|^{-p}}<1$$

的广义函数组成的。

定理 9.4 设 $\psi(n)$ 为正的增函数，当 $n\to\infty$ 时 $\lambda>0$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\psi(n)]^{\lambda}}$ 收敛。令 T 为适合以下条件的广义函数类

$$\log|a_n|=O(\log\psi(|n|))$$

$\mathring{T}$ 为适合

$$\log\psi(|n|)=o\left(\log\frac{1}{|b_n|}\right)$$

的广义函数组成的类，故 T、$\mathring{T}$ 为对偶关系。

若在定理 9.4 中以 $\psi(n)=n$，则类 T 为类 S。

定理9.5 S 类的对偶类$\mathring{S}$是依符合以下条件的广义函数组成的，对任意 $q>0$，

$$b_n=O\left(\frac{1}{|n|^q}\right)$$

若在定理 9.4 中以 $\psi(n)=e^n$，则用 I 表示得到的类 T。

定理9.6 I 类的对偶类 $\mathring{I}$ 依符合

$$\lim_{n\to\infty}|b_n|^{-\frac{1}{|n|}}=\infty$$

的广义函数组成的。

对 H 型广义函数 $u(\theta)$，函数

$$u(r,\theta)=\sum_n a_n e^{in\theta}r^{|n|}\quad(0\leqslant r<1,0\leqslant\theta<2\pi)$$

为单位圆的调和函数。故H 型广义函数可视为圆内调和函数的边界值函数；同样，$\mathring{H}$ 型广义函数$v(\theta)$对应于在较大同心圆中的调和函数。

显然，对$\mathring{I}$ 型广义函数$v(\theta)$，存在处处调和的函数 $\sum_n b_n e^{in\theta}r^{|n|}$，称之为调和整函数，于是$\mathring{I}$ 型广义函数为调和整函数在单位圆周上的数值。

广义函数 $\delta_\varphi(\theta)$属于 H 而不属于 $\mathring{H}$，其对应的调和函数

$$\sum_n e^{in(\theta-\psi)} r^{|n|} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}$$

为 Poisson 核，记作 $P(r,\theta)$

用 $f(\theta)$ 表示连续(或可积)函数，它的傅里叶系数为 b_n，则对任意 $u(\theta)\in H$ 常有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\overline{f(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_n a_n e^{in\theta} r^{|n|}\,\overline{f(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_n a_n r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(\theta)e^{in\theta}}\mathrm{d}\theta = \sum_n a_n \bar{b}_n r^{|n|}$$

若 $(u(\theta),\overline{f(\theta)})$ 收敛，则从阿贝尔定理，

$$(u(\theta),\overline{f(\theta)}) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\overline{f(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

对于一般情况，在 H 中的任意两个广义函数 $u(\theta)$、$v(\theta)$，当 $r<1$、$r'<1$ 时

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\overline{v(r',\theta)}\mathrm{d}\theta = \sum_n a_n \overline{b_n}(rr')^{|n|}$$

若 $(u,\bar{v})$ 存在，则

$$(u,\bar{v}) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\overline{v(r,\theta)}\mathrm{d}\theta$$

对 $u\in H$、$v\in \mathring{H}$，当存在 $\delta>0$，使 $0\leqslant r'<1+\delta$ 时，$v(r',\theta)$ 调和。取 $r=\frac{1}{r'}$、$r'=1+\frac{1}{2}\delta$，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\,\overline{v(r',\theta)}\mathrm{d}\theta = \sum_n a_n \bar{b}_n = (u(\theta),\overline{v(\theta)})$$

以上表述了 H 型广义函数的意义。

另外，任意连续函数 $u(\theta)$ 的傅里叶系数 a_n 满足

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\mathrm{d}\theta = O(1)$$

作为 S 型广义函数，其 p 阶导数的傅里叶系数 $a_n^{(p)}$ 满足

$$a_n^{(p)} = O(|n|^p)$$

反之，当 $a_n=O(|n|^p)$ 时 $u(\theta)-a_0$ 为广义函数 $\sum\limits_n^{*}\frac{a_n}{(in)^{p+2}}e^{in\theta}$ 的 $p+$

2 阶导数。该级数一致收敛于连续函数，因此S 型广义函数类本质上就是连续函数定义的广义函数的有限阶导数的集合。同理可知：$\mathring{S}$ 型广义函数类就是无穷次可导的函数组成的集合。

如果$u(\theta)-a_0$为连续函数$w(\theta)$的p阶导数，那么

$$(u,\overline{v})=a_0\,\overline{b_0}+\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)-a_0)\overline{v(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=a_0\,\overline{b_0}+\lim_{r\to 1}\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(r,\theta)\overline{v^{(p)}(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=a_0\,\overline{b_0}+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(\theta)\overline{v^{(p)}(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

以上表述了S 型广义函数的意义。

定义 9.1 单位圆周上的开区间$\theta\in(a,b)$称为H 型广义函数致零区间，当在(a,b)内的闭区间中时一致地

$$\lim_{r\to 1}u(r,\theta)=0$$

点θ_0称作$u(\theta)$的支点，当没有包括θ_0的致零区间存在时。

所有$u(\theta)$的致零区间的集合称作$u(\theta)$的致零集。

致零集是开集，其补集称作支点集，当然支点集的点为支点。对于广义函数$\delta_\psi(\theta)$，$\theta=\psi$为它的唯一支点，因为当$\theta\neq\psi$时$\lim\limits_{r\to 1}P(r,\theta)=0$。

定理9.7 H 型的只有一个支点$\theta=\psi$的广义函数可以表达成

$$u(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\,\overline{D^{(l)}[\delta_\psi(\theta)]}$$

这里$D^{(l)}[\delta_\psi(\theta)]$为$\delta_\psi^{(0)}(\theta)=\delta_\psi(\theta)$、$\delta_\psi^1(\theta)$、…、$\delta_\psi^{(l)}(\theta)$的线性组合；

$\delta_\psi^{(l)}(\theta)$为$\delta_\psi(\theta)$的$l$阶导数，也就是，对任意$v\in\mathring{H}$，

$$(u(\theta),\overline{v(\theta)})=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\,\overline{D^{(l)}(v(\psi))}$$

式中

$$D^{(l)}(v(\psi))=\frac{1}{l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}v(\psi+\arcsin x)\bigg|_{x=0}$$

以上的级数是收敛的。

定理9.8 S 型的只有一个支点$\theta=\psi$的广义函数可以表达成

$$u(\theta) = \sum_{l=0}^{k} c_l \overline{\delta^{(l)}(\theta)}$$

也就是，对任意$v \in \mathring{S}$，

$$(u(\theta), \overline{v(\theta)}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \overline{v^{(l)}(\theta)}$$

事实上，不失一般性，设$\psi=0$。将区间变为$-\pi,\pi$。

对于任意$\varepsilon>0$，当$r\to1$时函数在$|\theta|>\varepsilon$时的部分上一致趋近于零，故

$$\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)\ \overline{v(\theta)}\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r,\theta)\ \overline{v(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

当ε充分小时，在$|\theta|\leqslant\varepsilon$中把$v(\theta)$展成级数

$$v(\theta) = \sum_{l=0}^{k} D^{(l)}(v(0))\sin^l\theta + R(\theta)$$

其中$R(\theta)=O(\varepsilon^{k+1})$；

在定理9.7的条件下，该级数可以展到无穷，且当$|\theta|\leqslant\varepsilon$时一致收敛。因为

$$\begin{aligned}
C_l &= \lim_{r\to1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r,\theta)\sin^l\theta\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)\sin^l\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^l u(r,\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{r\to1}\frac{1}{(2i)^l}\sum_{t=0}^{l}\binom{l}{t}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta t}e^{-i\theta(l-t)}u(r,\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{(2i)^l}\sum_{t=0}^{l}\binom{l}{t}a_{l-2t}
\end{aligned}$$

这里$\binom{l}{t}$为组合数，所以定理9.7成立。

对于定理9.8，令

$$R^*(\theta) = \begin{cases} R(\theta) & \text{当} |\theta|<\varepsilon \text{时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R(\theta)u(r,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} R^*(\theta)u(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} R^*(\theta)(u(r,\theta) - a_0)\mathrm{d}\theta + a_0\int_{-\pi}^{\pi} R(\theta)\mathrm{d}\theta$$

最后一项表明随ε而趋近于零。再命$w(\theta)$表示连续函数其k阶导数等于$u(r,\theta)-a_0$，这样

$$\lim_{r\to 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} R^*(\theta)(u(r,\theta) - a_0)\mathrm{d}\theta\right|$$

$$= \lim_{r\to 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} R^{*(k)}(\theta)w(r,\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|R^{*(k)}(\theta)w(\theta)\right|\mathrm{d}\theta = O(\varepsilon)$$

即得定理9.8。

定义9.2 设$\rho>0$，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_n|}{n\log n}<\frac{1}{\rho} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_{-n}|}{n\log n}<\frac{1}{\rho}$$

则称$u(\theta)$为J_ρ型(类)广义函数。

J_ρ型广义函数组成线性集合，其导数也是广义函数；但两个J_ρ型广义函数的卷积未必是广义函数。

定理9.9 J_ρ的对偶类$\mathring{J}_\rho$的广义函数符合

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{|b_n|}}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{|b_{-n}|}}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho}$$

证明：首先，由J_ρ定义，对$\delta>0$存在$n_0(\delta)$，当$n\geqslant n_0(\delta)$时

$$\frac{\log|a_n|}{n\log n}<\frac{1}{\rho}-\delta$$

有

$$|a_n|<n^{\left(\frac{1}{\rho}-\delta\right)n}$$

从$\mathring{J}_\rho$定义，当n充分大时

$$|b_n|<n^{-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\delta}{2}\right)n}$$

表明$\sum\limits_n a_nb_n$收敛。

其次，设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_n|}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho}$$

即有数列n_l使

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\frac{\log|a_{n_l}|}{n_l\log n_l}=\frac{1}{\sigma}\geqslant\frac{1}{\rho}$$

取$b_{n_l}=\dfrac{1}{a_{n_l}}$、其余$b_n=0$，于是$v(\theta)\in\mathring{J}_\rho$且$\sum\limits_n a_nb_n$发散。

最后，命

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\dfrac{1}{|b_n|}}{n\log n}<\frac{1}{\rho}$$

即有数列n_l使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\dfrac{1}{|b_{n_l}|}}{n_l\log n_l}=\frac{1}{\tau}<\frac{1}{\rho}$$

取$a_{n_l}=\dfrac{1}{b_{n_l}}$、其余$a_n=0$，于是定义$u(\theta)\in J_\rho$且$\sum\limits_n a_nb_n$发散。

对应于J_ρ类中的广义函数$u(\theta)$，引入函数

$$u_\rho(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}p_mr^m\sum_{|n|\leqslant m}a_ne^{in\theta}$$

这里$p_m=\dfrac{1}{(m!)^{1/\rho}}$。因为存在$\delta>0$使

$$\left|p_m\sum_{|n|\leqslant m}a_ne^{in\theta}\right|<\frac{1}{(m!)^{1/\rho}}\sum_{|n|\leqslant m}|a_n|=O\left(m^{-\frac{1}{2}\delta m}\right)$$

所以在平面上任意紧致集$u_\rho(r,\theta)$是一致绝对收敛的级数。

定理 9.10 对任意$u\in J_\rho$、$v\in\mathring{J}_\rho$，则

$$(u,\bar{v})=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u_\rho(r,\theta)v(\theta)}{J_\rho(r)}\mathrm{d}\theta$$

式中$J_\rho(r)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{r^m}{(m!)^{1/\rho}}$。

证明：因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\,\overline{v(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sum_l\sum_{n=0}^{\infty}p_mr^m\sum_{|n|\leqslant m}a_n\bar{b}_l\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-l)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_m r^m \sum_{|n| \leqslant m} a_n \overline{b_n}$$

所以利用波莱尔求和定理推出本定理。

同样可定义它的致零集，即在开区间$\theta \in (a,b)$中的任意子闭区间内，当$r \to \infty$时

$$\frac{u_\rho(r,\theta)}{J_\rho(r)}$$

一致趋近于零；这种开区间的集合称作广义函数$u(\theta)$的致零集，致零集的补集中的点称作支点。

置幂级数

$$Q(r) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n r^n \qquad (q_n \geqslant 0)$$

对所有的r都收敛。以I_Q表示满足下述条件的广义函数的集合

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log(|a_n| q_n)}{n \log n} < 0 \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log(|a_{-n}| q_n)}{n \log n} < 0$$

对此可以得到结论：

类I_Q的对偶类$\mathring{I}_Q$是由适合于

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \dfrac{q_n}{|b_n|}}{n \log n} \geqslant 0 \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \dfrac{q_n}{|b_{-n}|}}{n \log n} \geqslant 0$$

的广义函数组成的。

对$u \in I_Q$、$v \in \mathring{I}_Q$，有

$$(u, \bar{v}) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_Q(r,\theta) \overline{v(\theta)}}{Q(r)} \mathrm{d}\theta$$

式中

$$u_Q(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m r^m \sum_{|n| \leqslant m} a_n e^{in\theta}$$

9.3 极限

设$u_l(\theta)(l=1,2,\cdots)$为广义函数类$T$中的一个函数贯$u(\theta) \in$

T 称为该贯的极限，定义是：在对偶类$\mathring{T}$ 中任意函数$v(\theta)$恒有

$$\lim_{l\to\infty}(u_l,\overline{v})=(u,\overline{v})$$

在T 的对偶类$\mathring{T}$ 中的广义函数一般为普通意义下的函数；对不同的情况，分别以普通函数的收敛作为它的极限。

(1) 取$v_l(r,\theta)$为函数贯，在包括闭单位圆的域内都是调和的，且在该域内的任意紧致子集上一致收敛，则其极限函数$v(r,\theta)$在该域中为调和的，称$v(\theta)$为$v_l(\theta)$的极限，记作$v_l(\theta)\to v(\theta)(\mathring{H})$。

对$u(\theta)\in H$，当$\delta(>0)$充分小时使所有$v_l(r,\theta)$定义的域包括有以$r'=1+\frac{1}{2}\delta$为半径的闭圆。而

$$(u(\theta),v_l(\theta))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\,\overline{v_l(r',\theta)}\mathrm{d}\theta\quad\cdot\quad(r=\frac{1}{r'})$$

依假定$v_l(r',\theta)$在半径为r'的闭圆内一致收敛，得

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v}_l)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\,\overline{v(r',\theta)}\mathrm{d}\theta=(u,\overline{v})$$

(2) 取$v_l(r,\theta)$为一个函数贯；在单位圆内调和，在圆周上无穷次可导，并对任意$p\geqslant 0$，

$$\frac{\partial^p}{\partial\theta^p}v_l(r,\theta)$$

在闭单位圆上一致收敛，于是推出其极限$v(r,\theta)$也在单位圆内调和，在圆周上无穷次可导；定义$v_l(\theta)\to v(\theta)(\mathring{S})$。

任给S 类的广义函数

$$u(\theta)=\sum_n a_n e^{in\theta}$$

并取

$$v_l(\theta)=\sum_n b_n^{(l)}e^{in\theta}\qquad v(\theta)=\sum_n b_n e^{in\theta}$$

因为$v_l(\theta)$在圆周上一致收敛，所以

$$\lim_{l\to\infty}b_0^{(l)}=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v_l(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\theta)\mathrm{d}\theta=b$$

当$u(\theta)$为连续函数$w(\theta)$的p阶导数时，

$$(u,\overline{v}_l)=a_0b_0^{(l)}+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(\theta)\,\overline{v_l^{(p)}(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

如果在圆周上$v_l^{(p)}(\theta)$一致收敛于$v^{(p)}(\theta)$，那么

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v_l})=a_0b_0+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(\theta)\lim_{l\to\infty}\overline{v_l^{(p)}(\theta)}\mathrm{d}\theta=(u,\overline{v})$$

也就是，当$v_l(\theta)\to v(\theta)(\mathring{S})$时恒有

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v}_l)=(u,\overline{v})$$

(3) 取$v_l(r,\theta)$为在整个平面上调和的一个函数贯。在任意紧致集上该贯收敛于函数$v(r,\theta)$，定义为$v_l(\theta)\to v(\theta)(\mathring{I})$。从(1)知

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v}_l)=(u,\overline{v})$$

(4) 取$v_l(r,\theta)$为一个零阶整调和函数贯，在平面任意紧致集上一致收敛于函数$v(r,\theta)$，设其也是零阶的，则定义$v_l(\theta)\to v(\theta)$ $(\mathring{J})$，同理有

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v}_l)=(u,\overline{v})$$

总之，对应于任何广义函数类T的对偶类$\mathring{T}$，一定可以仿照上述方法适当地引入$\mathring{T}$ 中的极限概念，并建立如下关系

$$\lim_{l\to\infty}(u,\overline{v}_l)=(u,\overline{v})$$

最后讨论求和问题。

定理9.11 若$q_l(r)$为在以r_0作右端的区间内的函数贯，并有性质

(1) $q_l(r)\geqslant 0$；

(2) $\sum\limits_{l=0}^{\infty}q_l(r)=1 \quad (r<r_0)$；

(3) 对任意l，$\lim\limits_{r\to r_0}q_l(r)=0$；

则当$t_n\to t$时

$$\lim_{r\to r_0}\sum_{l=0}^{\infty}q_l(r)t_l = t$$

证明：不失一般性，取 $t=0$；任给 $\varepsilon>0$ 存在 M，当 $l\geqslant M$ 时 $|t_l|<\varepsilon$。命对所有 l，$|t_l|\leqslant B$，得

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}q_l(r)t_l\right|\leqslant B\sum_{l=0}^{M}q_l(r)+\varepsilon\sum_{l=M+1}^{\infty}q_l(r)\leqslant B\sum_{l=0}^{M}q_l(r)+\varepsilon$$

当 $r\to r_0$ 时右边趋近于 ε。

如果取 $r_0=1$、$q_l(r)=(1-r)r^l$，满足条件(1)、(2)、(3)，那么当 $r\to 1$ 时

$$\sum_{l=0}^{\infty}(1-r)r^l t_l=\sum_{l=0}^{\infty}(t_l-t_{l-1})t^l\to\lim_{l\to\infty}t_l$$

定理 9.12 若 $\sum_{l=0}^{\infty}a_l$ 收敛于 t，则当 $r\to 1$ 时 $\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^l$ 也趋近于 t。

如果 $\sum_{l=0}^{\infty}p_l r^l\ (p_l\geqslant 0)$ 为处处收敛的幂级数，记

$$q_l(r)=\frac{p_l r^l}{\sum_{l=0}^{\infty}p_l r^l}$$

那么它满足条件(1)、(2)，而

$$\lim_{r\to\infty}q_l(r)=\lim_{r\to\infty}\frac{l p_l r^{l-1}}{\sum_{l=0}^{\infty}l p_l r^{l-1}}=\cdots=0$$

波莱尔定理 若 $\sum_{l=0}^{\infty}p_l r^l(p_l\geqslant 0)$ 为处处收敛的幂级数，则当 $t_l\to t$ 时

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{l=0}^{\infty}p_l r^l t_l}{\sum_{l=0}^{\infty}p_l r^l}=t$$

定理 9.13 取 $q(r,\theta)$ 为定义在 $0\leqslant\theta<2\pi$、$0\leqslant r<1$ 区间的函数，并符合

(1) $q(r,\theta)\geqslant 0$；

(2) $\int_0^{2\pi} q(r,\theta)\mathrm{d}\theta = 1$；

又对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{r\to 1}\int_{|\theta|\geqslant\varepsilon} q(r,\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

当 $\theta\to 0$ 时囿变函数 $f(\theta)\to t$，即

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} q(r,\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta = t$$

10 Picard 定理证明

10.1 Picard 小定理

Picard 定理在值分布理论中具有重要意义；利用复变函数可以证明Picard 定理，但是证明的过程较为烦琐；今用微分几何证明 Picard 定理。

若Ω为复平面C中的域，在Ω上定义非负的C^2函数ρ，则称ρ为度量，也就是$\mathrm{d}S_\rho^2=\rho^2|\mathrm{d}z|^2$。据此得到距离$\mathscr{D}$：在$z_1$、$z_2$($\in\Omega$)之间，

$$\mathscr{D}(z_1,z_2)=\inf_\gamma\int_\gamma\rho(z)|\mathrm{d}z| \tag{10.1}$$

式中inf 为在所有连接z_1、z_2且各点均在Ω中的曲线γ上取到。对于度量ρ、定义曲率K，

$$K(z,\rho)=-\frac{\nabla^2\log\rho(z)}{\rho^2(z)} \tag{10.2}$$

式中 ∇^2为拉普拉斯算子，即

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

而$z=x+iy=re^{i\theta}$。不难证明式(10.2)定义的曲率与微分几何定义的高斯曲率相同。

有三种基本度量在微分几何中常用：

(1) 抛物度量　如果$\Omega=C$并在C中取度量$\rho(z)=1$，对所有$z\in C$，$\mathrm{d}s^2=|\mathrm{d}z|^2$，那么称该度量为抛物度量。这时$\mathscr{D}(z_1、z_2)=\inf\limits_\gamma\int_\gamma|\mathrm{d}z|=|z_1-z_2|$表示连接$z_1$、$z_2$直线段的长度。

依变换$\{w=a+ze^{i\theta}\,|\,\theta$为实数，$a$为复数$\}$构成的群，是由旋转$ze^{i\theta}$、平移$z+a$的复合而成的群，称之为刚体运动群；它是全纯自同构群Aut(C)中的z群。抛物度量为刚体运动群下的不变量。从

式(1.2)知$K(z,\rho)=0$对任意$z\in C$均成立。

(2) 双曲度量　如果Ω为单位圆$D(0,1)=\{z\,|\,|z|<1\}$，在$D(0,1)$上取度量$\rho=\lambda(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$即$\mathrm{d}s_\lambda^2=\dfrac{4|\mathrm{d}z|^2}{1-|z|^2}$，那么称该度量为双曲度量。$D(0,1)$的全纯自同构群$\mathrm{Aut}(D(0,1))$由变换$\left\{w=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}e^{i\theta}\,\middle|\,\theta\text{ 为实数},a\in D(0,1)\right\}$构成；或者说，群由旋转及莫比乌斯(Möbius)变换组成；而且双曲度量是$\mathrm{Aut}(D(0,1))$下的不变量。

现计算$D(0,1)$中z_1、z_2之间的双曲距离。

考虑$D(0,1)$中的$z_1=0$、$z_2=R+i0(R<1)$的双曲距离，此时连接两点的曲线γ记作

$$z(t)=u(t)+iw(t)\qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$w(0)=u(0)+w(1)=0\qquad (u(1)=R)$$

但$u^2(t)+w^2(t)<1$，u、w为t的C^1实值函数，有

$$\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_\gamma \frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}=2\int_0^1\frac{\sqrt{[u'(t)]^2+[w'(t)]^2}}{1-u^2(t)-w^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_0^1\frac{2|u'(t)|}{1-u^2(t)}\mathrm{d}t\geqslant\left|\int_0^R\frac{2\mathrm{d}u}{1-u^2}\right|=\log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$$

当且仅当$w(t)=0$时等号成立，推出

$$\mathscr{D}(0,R+i0)=\inf_\gamma\int_\gamma\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}=\log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$$

而使积分取inf的γ为连接0、$R+i0$的直线段。

因为$w=ze^{i\theta}$是$\mathrm{Aut}(D(0,1))$中的元素，所以$D(0,1)$中任意两点的双曲距离经过$w=ze^{i\theta}$变换后是不变的，即有

$$\mathscr{D}(0,Re^{i\theta})=\log\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$$

对任意实数θ成立。

若z_1、$z_2\in D(0,1)$，则

$$\varphi(z)=\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$$

为 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 中的元素，将 z_1 映射为 0、z_2 映射为 $\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$，于是

$$\mathscr{D}(z_1,z_2)=\mathscr{D}\left(0,\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right)=\log\frac{1+\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} \tag{10.3}$$

这是双曲距离，并在

$$\mathscr{D}(z_1,z_2)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

中取 inf 的 γ 是曲线

$$z=\frac{z_1+\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}t}{1+\bar{z}_1\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}t}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

或

$$z=\frac{(1-t)z_1+(t-z_1\bar{z}_1)z_2}{1-tz_1\bar{z}_1-(1-t)\bar{z}_1 z_2}$$

从式(10.3)知当 $z_2\to z_1$ 时 $\mathscr{D}(z_1,z_2)=0$；当 z_1(或 z_2)趋近于 $D(0,1)$ 的边界点时 $\mathscr{D}(z_1,z_2)\to\infty$。

可以证明：如果 $f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中全纯函数，把 $D(0,1)$ 映射到 $D(0,1)$，且 $w_1=f(z_1)$、$w_2=f(z_2)$，那么

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-\bar{w}_1 w_2}\right|\leqslant\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right| \tag{10.4}$$

当且仅当 $f(z)\in\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 时等号成立。

依式(10.3)，式(10.4)可写成

$$\mathscr{D}(w_1,w_2)\leqslant\mathscr{D}(z_1,z_2)$$

式(10.4)有明确的几何意义：若 $w=f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中的全纯函数，将 $D(0,1)$ 映射到 $D(0,1)$，则 $D(0,1)$ 中任意两点之间的双曲距离经过映射后不会增加；当且仅当 $f(z)\in\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 时距离相等。

注意到 $\nabla^2=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$，得

$$-\nabla^2\log\lambda(z)=\nabla^2\log(1-|z|^2)=-\frac{4}{(1-|z|^2)}$$

故双曲度量$\lambda(z)$的曲率$K(z,\lambda)=-1$对所有$z\in D(0,1)$均成立，称该度量为双曲度量。

(3) 椭圆度量

若Ω为扩充复平面C^*，在C^*上取度量$\rho=\sigma(z)=\dfrac{2}{1+|z|^2}$，也就是

$$ds_\sigma^2=\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

则称这个度量为椭圆度量。在球面投影建立的黎曼球面S^2与C^*之间存在双射。当$z\in C^*$时在S^2上对应的点坐标是

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \qquad (10.5)$$

若$P(x_1,x_2,x_3)$、$P'(x'_1,x'_2,x'_3)\in S^2$，则$P$、$P'$之间在$S^2$上的最短距离为过$P$、$P'$的大圆上的弧$\overset{\frown}{PP'}$的弧长，即

$$2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x_1x'_1-x_2x'_2-x_3x'_3}{1+x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3}}$$

利用式(10.5)，它等于$2\mathrm{arctg}\left|\dfrac{z-z'}{1+z\bar{z}'}\right|$。把这个距离作为$C^*$中的一种度量，得到$z$、$z'$之间的距离，

$$\mathscr{D}(z,z')=2\mathrm{arctg}\left|\frac{z-z'}{1+z\bar{z}'}\right|$$

对应的度量为

$$ds^2=\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

也就是

$$ds^2=\sigma^2(z)|dz|^2 \qquad \sigma(z)=\frac{2}{1+|z|^2}$$

度量$\sigma(z)$有明确的几何意义。以$\sigma(z)$计算C^*中两点之间的距离等于在S^2上对应的两点之间的最短距离，即球面距离。或者说，用S^2上对应两点之间的球面距离作为C^*中两点之间的距离，故

$$\mathscr{D}(z_1,z_2)=\inf_\gamma\int_\gamma\sigma(z)|dz|$$

这里γ为连接z_1、z_2的任意曲线。

若z_1、z_2在S^2上的对应的点为P_1、P_2，连接P_1、P_2的大圆上的弧$\widehat{P_1P_2}$，把$\widehat{P_1P_2}$经过球面投影到C^*中连接z_1、z_2的曲线γ_0，γ_0就是使上式中积分取inf的曲线。$\sigma(z)$就是一个椭圆度量。

单值化定理 任意单连通的黎曼曲面必定一对一地全纯等价于下列三个区域之一：①C；②$D(0,1)$；③C^*。

式(10.2)定义的曲率有一个重要性质，即曲率为全纯映射下的不变量。

若Ω_1、Ω_2为C中区域，f为Ω_1上的全纯函数，将Ω_1映射为Ω_2；若ρ为Ω_2上的度量，又$f'\neq 0$，于是

$$f^*\rho=(\rho\circ f)|f'| \tag{10.6}$$

定义了在Ω_1上的度量，称之为从度量ρ通过$f(z)$拉回(pullback)到Ω_1上的度量。为此证明

$$K(z,f^*\rho)=K(f(z),\rho) \tag{10.7}$$

实际上，因为

$$\nabla^2\log|f'(z)|=0$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\log(\rho\circ f(z))&=4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\log(\rho\circ f(z))\\&=4\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}}\log(\rho\circ f)\right]\\&=|f'(z)|^2=(\nabla_f^2\log\rho)\circ f(z)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}K(z,f^*\rho)&=-\frac{|f'(z)|^2(\nabla_f^2\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2|f'(z)|^2}\\&=-\frac{(\nabla_f^2\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2}=K(f(z),\rho)\end{aligned}$$

定理10.1 设$f(z)$为$D(0,1)$上的全纯函数，f将$D(0,1)$映射为U。如果在U上可以引入度量ρ，即$\mathrm{d}s_\rho^2=\rho^2(z)|\mathrm{d}z|^2$，使其曲率在$U$上任意一点都不大于$-1$，那么

$$f^*\rho(z)=\lambda(z) \tag{10.8}$$

式中 $\lambda(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$，即

$$ds_\rho^2 \leqslant ds_\lambda^2 \tag{10.9}$$

也就是经过映射后度量不增加。

证明：任意固定 $r\in(0,1)$，在以原点为中心、r 为半径的圆 $D(0,r)$ 上定义度量

$$\lambda_r(z)=\frac{2r}{r^2-z^2}$$

显见，在 $D(0,r)$ 中任意一点 z 上，其曲率均为 -1。定义

$$v(z)=\frac{f^*\rho(z)}{\lambda_r}$$

这样在 $D(0,r)$ 上 v 是非负的连续函数，依式(10.6)，$f^*\rho(z)=\rho(f(z))|f'(z)|$ 在 $\overline{D(0,r)}$ 上是有界的，且当 $|z|\to r$ 时 $\dfrac{1}{\lambda_r}\to 0$；于是当 $|z|\to 0$ 时 $v\to 0$。所以 v 只能在 $D(0,r)$ 中的某点 τ 处取得极大值 M。如果 $M\leqslant 1$，那么在 $D(0,r)$ 上 $v\leqslant 1$。令 $r\to 1-0$ 就得式(10.9)。

对于 $f^*\rho(\tau)=0$，$v\equiv 0$。设 $f^*\rho(\tau)>0$，此时 $K(\tau,f^*\rho)$ 有意义，故从假设 $K(\tau,f^*\rho)\leqslant -1$，因 $\log v$ 在 τ 处取极大值，得

$$\begin{aligned}0\geqslant \nabla^2\log v(\tau) &= \nabla^2\log[f^*\rho(\tau)]^2-\nabla^2\log\lambda_r(\tau)\\ &=-K(\tau,f^*\rho)[f^*\rho(\tau)]^2+K(\tau,\lambda_r)[\lambda_r(\tau)]^2\\ &\geqslant [f^*\rho(\tau)]^2-[\lambda_r(\tau)]^2\end{aligned}$$

推出

$$\frac{f^*\rho(\tau)}{\lambda_r(\tau)}\leqslant 1$$

表明 $M\leqslant 1$。

定理 10.1 的更一般形式为：在 $D(0,\alpha)$ 上定义度量

$$\lambda_\alpha^A(z)=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}\,(\alpha^2-|z|^2)}\quad(\alpha>0) \tag{10.10}$$

其中 $A>0$；因此这个度量在 $D(0,\alpha)$ 中任意一点的曲率都是 $-A$。

定理10.2 取 $f(z)$ 为 $D(0,\alpha)$ 上的全纯函数，将 $D(0,\alpha)$ 映射为 U。如果在 U 上可以定义一个度量，即 $ds_\rho^2=\rho^2(z)|dz|^2$，使其曲率

在U上任意一点均不大于$-B$，那么

$$f^{*}\rho(z)\leqslant\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_{\alpha}^{A}(z) \tag{10.11}$$

对$z\in D(0,\alpha)$成立，而B为正常数。

定理10.3 若整函数$f(z)$把C映射到U，并且在U上可以定义一个度量ρ，使对任意$z\in U$，其曲率$K(z,\rho)$满足$K(z,\rho)\leqslant -B<0$，则$f(z)$为常数。

证明：对任意$\alpha>0$，$f(z)$把$D(0,\alpha)$映射到U内，依假设，可在其上定义度量，使其曲率$K(z,\rho)\leqslant -B<0$；利用定理10.2，

$$f^{*}\rho(z)\leqslant\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_{\alpha}^{A}(z)$$

应用式(10.10)，当$\alpha\to\infty$时$\lambda_{\alpha}^{A}(z)\to 0$，故$f^{*}\rho(z)\leqslant 0$；表明$f^{*}\rho(z)=0$。考虑到$f(z)$为全纯函数，$f(z)$必为常数。

定理10.3是刘维尔定理的推广。根据刘维尔定理知：若整函数$w=f(z)$将C映射到有界域，则$f(z)$为常数；若整函数$w=f(z)$将C映射到无界域，且$C\backslash U$的面积为正，则$f(z)$为常数。

假如整函数$w=u+iv=f(z)$把C映射为$C\backslash\{u+i0\,|\,0\leqslant u\leqslant 1\}$，作变换

$$w_1=u_1+iv_1=\varphi(w)=\frac{w}{w-1}$$

其将C映射为$C\backslash\{u_1+i0\,|\,u_1\leqslant 0\}$。作变换

$$w_2=r(w_1)=\sqrt{w_1}$$

这里开方根取主分支，于是w_2把C映射为右半平面。又作凯莱变换

$$w_3=\frac{w_2-1}{w_2+1}=s(w_2)$$

其将右半平面映射为单位圆，依刘维尔定理，w_3为常数且推出w_1、w_2、w为常数。

由此可见，整函数$w=f(z)$将C映射到无界域U，即使$C\backslash U$为线段，该整函数仍为常数；当这里根线段的长度可以为任意小的正数时$f(z)$也是常数。

定理10.4 若U为C中的开集,$C\backslash U$至少包括两个点,则在U上引入度量μ,使其曲率$K(z,\mu)$在U的每个点都符合

$$K(z,\mu)\leqslant -B<0$$

式中B为正常数

证明:在$C\backslash U$中取两点,并以线性变换把这两点变为0、1,记$C_{01}=C\backslash\{0,1\}$,在$C_{01}$上作度量

$$\mu(z)=\frac{\left(1+|z|^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{|z|^{5/6}}\frac{(1+|z-1|)^{\frac{1}{2}}}{|z-1|^{5/6}} \tag{10.12}$$

这样$\mu(z)$在C_{01}上为光滑的正函数。今计算μ的曲率并证明它为负的。

因为

$$\nabla^2\left(\log|z|^{\frac{5}{6}}\right)=\frac{5}{12}\nabla^2\left(\log|z|^2\right)=0$$

所以

$$\nabla^2\log\frac{\left(1+|z|^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{|z|^{5/6}}=\frac{1}{2}\nabla^2\log\left(1+|z|^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log\left[1+(z\bar{z})^{\frac{1}{6}}\right]=\frac{1}{18|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2}$$

同理,

$$\nabla^2\log\frac{\left(1+|z-1|^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{|z-1|^{5/6}}=\frac{1}{18|z-1|^{5/3}\left[1+(z-1)^{1/3}\right]^2}$$

它的曲率是

$$K(z,\mu)=-\frac{1}{18}\left[\frac{|z-1|^{\frac{5}{3}}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}+\right.$$

$$\left.\frac{|z|^{\frac{5}{3}}}{(1+|z|^{1/3})\ (1+|z-1|^{1/3})^3}\right]$$

导出:

(1) 对所有$z\in C_{01}$,$K(z,\mu)<0$;

(2) $\lim\limits_{z\to 0}K(z,\mu)=-\frac{1}{36}$;

(3) $\lim\limits_{z\to 1}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$;

(4) $\lim\limits_{z\to\infty}K(z,\mu)=-\infty$。

故$K(z,\mu)$在C_{01}上存在负整数$-B$作为其上界,表明定理成立。

Picard 小定理 若整函数$w=f(z)$将C映射为U,$C\setminus U$至少包括两个点,则$f(z)$为常数。

从定理10.4就得Picard小定理。

定义10.1 设$\{g_j\}$为域Ω上的复值函数序列(未必全纯)。若对任给$\varepsilon>0$以及Ω中任意紧致集K,一定存在仅取决于ε、K的正整数J,当$j>J$时

$$|g_j(z)-g(z)|<\varepsilon$$

对$z\in K$均成立,则称$\{g_j\}$在Ω上正规收敛。

或者说,如果$\{g_j\}$在Ω上为内闭一致收敛,那么称$\{g_j\}$在Ω上正规收敛。

若对Ω中的任意紧致集L必存在仅取决于K、L的正整数J,当$j>J$时$g_j(z)\notin L$对$z\in K$均成立,则称$\{g_j\}$在Ω上紧发散;或者说,如果$\{g_j\}$在Ω上任意紧致集上一致发散到∞,那么称$\{g_j\}$为紧发散。

定义10.2 设$\mathscr{F}$为域Ω上复值函数族。若$\mathscr{F}$中任意序列或存在子序列正规收敛或存在子序列紧发散,则称$\mathscr{F}$为正规族。

定理10.5 设$\mathscr{F}$为域Ω上的全纯函数族。若对Ω中任意紧致集K,有常数M_K,使

$$|f(z)|\leqslant M_K \tag{10.13}$$

对于$z\in K$,$f\in\mathscr{F}$均成立,则$\mathscr{F}$为正规族

$|f(z)|\leqslant M$(常数)对所有$z\in\Omega$,$f\in\mathscr{F}$都成立。

由于$\mathscr{F}$为全纯函数族并适合式(10.13),因此不可能存在紧发散。正规族的概念可以推广到亚纯函数族。

定义10.3 设$\mathscr{F}$为域$\Omega\subset C^*$上亚纯函数族。若$\mathscr{F}$的任意序列一定存在一个序列,在Ω上球面距离的意义下为正规收敛的,则称$\mathscr{F}$为正规族。

判别法 如果$\mathscr{F}$为域Ω上的亚纯函数族,那么$\mathscr{F}$为正规族

当且仅当

$$\{f^*\sigma \mid f\in\mathscr{F}\} \tag{10.14}$$

在Ω的任意紧致集上一致有界，而σ为椭圆度量，即对Ω中任意紧致集K，存在常数M_K使

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\leqslant M_K \tag{10.15}$$

对$z\in K, f\in\mathscr{F}$均一致成立。

证明：式(10.14)在Ω的任意紧致集上一致有界与式(10.15)等价是显然的。当式(10.15)正确时，

$$\mathscr{D}(f(z_1),f(z_2))=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\mathrm{d}s=\inf_{\gamma'}\int_{\gamma'}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|\mathrm{d}z|$$

$$\leqslant\int_{\gamma_0}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|\mathrm{d}z|\leqslant M_K|z_1-z_2|$$

这里γ为连接$f(z_1)$、$f(z_2)$且全在K中的曲线，γ'为$f^{-1}(\gamma)$，γ_0为从z_0到z_1的直线段。于是在球面距离的意义下$\mathscr{F}$为等度连续，并且球面距离是有限距离，表明$\mathscr{F}$一致有界。依Ascoli－Arzela定理，$\mathscr{F}$为正规族。反之，当$\mathscr{F}$为正规族时式(10.15)成立。

事实上，若式(10.15)不成立，则在Ω中有紧致集E和$\mathscr{F}$中的序列$\{f_n\}$，使$\max\limits_{z\in E}f_n^*\sigma(z)$无界。由于$\mathscr{F}$为正规族，因此$\{f_n\}$中存在子序列$\{f_{n_k}\}$，当$n_k\to\infty$时$f_{n_k}\to f$在$E$上一致成立。对$E$中的每个点，可以有闭圆$\overline{D}\subset\Omega$，在$\overline{D}$中或$f$为全纯或$\frac{1}{f}$为全纯。

如果f为全纯，那么在$\overline{D}$上有界。注意到$\{f_{n_k}\}$在球面距离的意义下收敛，当n_k充分大时$\{f_{n_k}\}$在$\overline{D}$内无极点。应用维尔斯特拉斯定理知$f_{n_k}^*\sigma$在比$\overline{D}$小一点的圆上一致收敛于$f^*\sigma$。因为$f^*\sigma$为连续函数，所以$f_{n_k}^*\sigma$在小一点的圆上有界。同样，当$\frac{1}{f}$全纯时，同理知$\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^*\sigma$在小一点的圆上有界。而

$$\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^*\sigma=f_{n_k}^*\sigma$$

知$f_{n_k}^*\sigma$在小一点的圆上有界。考虑到E为紧致集，于是可用有限个这种小圆覆盖它。据此，$f_{n_k}^*$在E上有界，产生矛盾。

定理 10.6 设$\mathscr{F}$为域Ω上的亚纯函数族，P、Q、R为三个不同的点。如果$\mathscr{F}$中的任意函数取值于$C^*\backslash\{P,Q,R\}$，那么$\mathscr{F}$为正规族。

证明：以分式线性变换把P、Q、R三点变为$P=0$、$Q=1$、$R=\infty$。为此证明：全纯函数族中任意函数当$P\neq 0$、$Q\neq 1$时该函数族为正规族。也就是，在$C_{01}=C\backslash\{0,1\}$上取值的全纯函数族成正规族。这只需证明：对$\Omega$中任意圆$D(z_0,\alpha)=\{z \mid |z-z_0|<\alpha\}\subseteq\Omega$中$\mathscr{F}$成为正规族即可；且不妨设$z_0=0$。用度量$\mu$乘以常数$\alpha$(仍记作$\mu$)，其曲率上界为$-1$。利用式(10.10)，对任意$f\in\mathscr{F}$有

$$f^*\mu(z)\leqslant\lambda_\alpha^A(z)$$

推出

$$\mu(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|\leqslant\frac{2\alpha}{\sqrt{A}\,(\alpha^2-|z|^2)} \tag{10.16}$$

对$z\in D(0,\alpha)$都成立。

在C_{01}中比较椭圆度量$\sigma(w)$、$\mu(w)$，当或$w\to 1$、或$w\to 0$、或$w\to\infty$时，

$$\frac{\sigma(w)}{\mu(w)}=\frac{\dfrac{2}{1+|w|^2}}{\dfrac{\alpha(1+|w|^{1/3})^{1/2}(1+|w-1|^{1/3})^{1/2}}{|w|^{5/6}|w-1|^{5/6}}}\to 0$$

故有正常数M使$\sigma(w)\leqslant M\mu(w)$；依(10.16)，当$z\in D(0,\alpha)$时

$$f^*\sigma(z)=\sigma(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|\leqslant M\mu(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|$$

$$=Mf^*\mu(z)\leqslant M\lambda_\alpha^A=\frac{2\alpha M}{\sqrt{A}\,(\alpha^2-|z|^2)}$$

成立。于是$f^*\sigma$在$D(0,\alpha)$的紧致集上有界，并不取决于$f\in\mathscr{F}$。根据判别法导出$\mathscr{F}$为正规族。

定理 10.7 如果$\mathscr{F}$为域Ω上的全纯函数族，对$\mathscr{F}$中的每个函数，当均不取相同的两个复数时，则$\mathscr{F}$为正规族。

10.2 Picard 大定理

Picard 大定理 若$f(z)$在$D'(0,r)=D(0,r)\setminus\{0\}$中全纯，而$z=0$为$f(z)$的本性奇点，则$f(z)$在$z=0$处的任意邻域可取到$C$中任意的值最多去掉一个例外点；当用任意一点$z$替代$z=0$时结论不变。

证明：用反证法。设Picard 大定理错误；不妨取$f(z)$在$D'(0,1)$上全纯，f将$D'(0,1)$映射到的区域不取0、1两点，并证明：$z=0$必为$f(z)$的可去奇点或极点，产生矛盾。

定义$f_n(z)=f\left(\dfrac{z}{n}\right)(0<|z|<1)$，构造全纯函数族$\mathscr{F}=\{f_n\}$，$\mathscr{F}$在$C_{01}$中取值。应用定理10.7知$\mathscr{F}$为正规族，于是在$\{f_n\}$中有子序列$\{f_{n_k}\}$，其或正规收敛或紧发散。若$\{f_{n_k}\}$为正规收敛，则$\{f_{n_k}\}$在$D'(0,1)$的任意紧致集上一致收敛，表明有界。尤其是在$\left\{z\,\middle|\,|z|=\dfrac{1}{2}\right\}$上有界$M$，也就是$f(z)$在$\left\{z\,\middle|\,|z|=\dfrac{1}{2_{n_k}}\right\}$上有界$M$。依最大模原理，$f$在$0<|z|<\dfrac{1}{2}$上有界$M$，推出$z=0$为$f(z)$的可去奇点。

当$\{f_{n_k}\}$为紧发散时，同理可证：对于$z\to0$，$\dfrac{1}{f}\to0$，即$f\to\infty$；对于$z\to0$，$z=0$为$f(z)$的极点。

Picard 大定理是Picard 小定理的推广，用于表述函数在本性奇点附近的值分布。应用微分几何还可以证明下述的三个事实。

如果$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots(a_1\neq0)$为$D(0,r)$上的全纯函数且$f\neq0$、1，那么$r\leqslant R(a_0,a_1)$；这里$R(a_0,a_1)$为仅取决于$a_0$、$a_1$的常数。

如果$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$为$D(0,r)$中的全纯函数且$f\neq$ 0、1，那么对每个$\theta\in(0,1)$，存在仅取决于a_0及θ的常数$M(a_0,\theta)$，使$|f(z)|\leqslant M(a_0,\theta)$对所有$|z|\leqslant\theta r$均成立。

如果$f(z)$在单位圆盘D上全纯且$f'(0)=1$，那么$f(D)$一定包括一个以B为半径的圆；这里B为不取决于f的正常数。

11 多复变函数

11.1 基本性质

11.1.1 全纯函数

今以C^n表示复数域C上的n维线性空间、R^n表示实数域R上的n维线性空间，且赋予它们自然拓扑。对$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in C^n$，

$$\|z\|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2}$$

$$|z|=\max_j|z_j| \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

又以α、β、…表示非负整数集N的元素组成的n元组为$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(\alpha_j\in N)$。取$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$

用$\alpha\leqslant\beta$表示$\alpha_j\leqslant\beta_j$而用$\alpha<\beta$表示$\alpha\leqslant\beta$并且$\alpha\neq\beta$。

如果$a\in C^n$、$\rho=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)$，那么以$a$为中心、以$\beta$半径的多圆柱是指集合。

$$P(a,\rho)=\{z\in C^n \mid |z_j-a_j|<\rho_j;j=1,2,\cdots,n\}$$

用$\overline{P}(a,\rho)$表示$P(a,\rho)$在C^n中的闭包。对$z\in C^n$、$\alpha\in N^n$，令

$$z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$$

为方便，有时将C等同于R^2、C^n等同于R^{2n}，于是

$$z=x+iy \qquad z_j=x_j+iy_j \qquad (x、y\in R^n,i=\sqrt{-1},x_j、y_j\in R)$$

对于开集$\Omega\subset C^n$上的连续可导复值函数，命

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}-i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right) \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}+i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right)$$

$$(D^\alpha g)(z)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\partial z_2^{\alpha_2}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}g(z)$$

若A、B为豪斯道夫拓扑空间X的两个子集，则用$A\overset{*}{\subset}B$表示

A 是在 B 内相对紧致的。一般 $\mathring{A}$ 表示 A 的内点组成的集，$\overline{A}$ 表示 A 的闭包，$\partial A=\overline{A}\setminus\mathring{A}$ 表示 A 的边界。

一个开集 $\Omega\subset R^n$ 上的无穷次可导函数构成的类，记作 $C^\infty(\Omega)$ 称 $C^\infty(\Omega)$ 的每个元素为 C^∞ 函数。

定义 11.1 设 Ω 为 C^n 中的开集，f 为 Ω 上的复值函数，于是称 f 在 Ω 上为全纯函数。若对所有 $a\in\Omega$ 均有邻域 U 及幂级数

$$\sum_{\alpha\in N^n}C_\alpha(z-a)^\alpha=\sum_{\alpha_j>0}C^n_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}(z_2-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

对所有 $z\in U$，则该级数收敛于 $f(z)$。记 $\mathscr{H}(\Omega)$ 表示 Ω 上的全纯函数的集合。

定理 11.1 若 $\{c_\alpha\}_{\alpha\in N^n}$ 为复数集合，且对 $\rho_j>0$ 存在 $M>0$，使对所有 $\alpha\in N^n$ 有

$$|c_\alpha|\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\cdots\rho_n^{\alpha_n}\leqslant M$$

则级数

$$\sum_{\alpha\in N^n}c_\alpha(z-a)^\alpha$$

对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j(0\leqslant\theta<1)$ 是一致收敛的，且导数级数

$$\sum_{\alpha\in N^n}c_\alpha D^\beta(z-a)^\alpha \qquad (\beta\in N^n)$$

也对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是一致收敛的。

全纯函数都是无穷可导的，当 $f(z)=\sum_\alpha c_\alpha(z-a)^\alpha$ 时

$$c_\alpha=\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)$$

定理 11.2 若 f 在 $\Omega\subset C^n$ 上全纯，则 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0(j=1,2,\cdots,n)$。

定理 11.3 设 $\Omega\subset C^n$ 为连通开集，f 在 Ω 上全纯。如果 f 在 Ω 的一个非空开集上恒为零，那么在 Ω 上 $f\equiv0$。

实际上，取 $E=\{z\in\Omega\mid D^\alpha f(z)=0$，对所有 $\alpha\in N^n\}$、置 $E_\alpha=\{z\in\Omega\mid D^\alpha f(z)=0\}$。因为 $D^\alpha f$ 连续，所以 E_α 是闭集，$E=\bigcap_\alpha E_\alpha$ 也是闭的。

当$a\in E$时有一个a的开邻域U和幂级数$\sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}$；对所有$z\in U$，它收敛于$f(z)$。利用定理10.1与$a\in E$，推出$c_{\alpha}=\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)=0$。表明对$z\in U$有$f(z)=0$；这种对$z\in U$、$\alpha\in N^{n}$存在$D^{\alpha}f(z)=0$，于是$U\subset E$，即$E$为开集。

注意到Ω的连通性，得到$E=\varnothing$，也就是$E=\Omega$。

定义11.2 设Ω为R^{n}内的开集、f为Ω上的函数（或实或复），称f为实解析的。如果对每个$a\in\Omega$对应一个a的邻域U以及幂级数$\sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}(x-a)^{\alpha}$，那么对所有$x\in U$，它收敛于$f(x)$。

柯西公式 若Ω为C^{n}内开集，f为Ω上的全纯函数，而$a\in\Omega$、$\rho=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)(\rho_j>0)$使$\overline{P}(a,\rho)\subset\Omega$，则对$z\in P(a,\rho)$，有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^{n}}\int\limits_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}\mathrm{d}^{n}\zeta$$

从柯西公式导出

$$D^{\alpha}f(z)=\alpha!(2\pi i)^{n}\int\limits_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}\mathrm{d}^{n}\zeta$$

式中

$$\int\limits_{|\zeta-a|=\rho}A\mathrm{d}^{n}\zeta=\int\limits_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int\limits_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}A\,\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_n$$

当f为多圆柱$P(a,\rho)$内的全纯函数时，级数

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)(z-a)^{\alpha}$$

对$z\in P(a,\rho)$收敛于$f(z)$。

假定φ在集合$|\zeta_j-a_j|=\rho_j(j=1,2,\cdots,n)$上为连续函数，知

$$f(z)=\int\limits_{|\zeta-a|=\rho}\varphi(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}\mathrm{d}^{n}\zeta$$

在$P(a,\rho)$内全纯，并等于

$$\sum_{\alpha}c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}$$

这里

$$c_\alpha = \int\limits_{|\zeta - a| = \rho} \varphi(\zeta) \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - a_j)^{-\alpha_j - 1} \mathrm{d}^n\zeta$$

此等式可从下式推得

$$\prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)^{-1} = \sum_{\alpha \in N^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(z_j - a_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j - a_j)^{\alpha_j + 1}}$$

该级数对 z 在 $P(a,\rho)$ 的一个紧致集上并当 $|\zeta_j - a_j| = \rho_j$ 时是一致收敛的。

定理 11.4 若 f 为 Ω 上的全纯函数且 $\overline{P}(a,\rho) \subset \Omega$，则

$$|D^\alpha f(a)| \leqslant \frac{M\alpha!}{\rho^\alpha}$$

其中 $M = \sup\limits_{|\zeta_j - a_j| = \rho_j} |f(\zeta)|$。

事实上，记 $\zeta_j - a_j = \rho_j e^{i\theta_j}$，从柯西公式推出定理 11.4。

11.1.2 开映射定理

开映射定理 若 Ω 为 C^n 中的连通开集且 f（非常数）是在 Ω 上的全纯函数，则 $f: \Omega \to C$ 是开的，也就是 f 将 Ω 中的开集映射为 C 中的开集。

证明：(1) 第一步。当 $n=1$ 时设 $0 \in \Omega$、$f(0)=0$，为此证明 $f(\Omega)$ 是 O 的邻域。取 $\rho > 0$，使 $\{z \in C \mid |z| \leqslant \rho\} \subset \Omega$ 并对于 $|z| = \rho$，有 $f(z) \neq 0$。记 $\delta = \inf\limits_{|z| = \rho} |f(z)|$，推出 $\delta > 0$；再取 $W \in C$、$W \notin f(\Omega)$、$|W| < \delta$，得到

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - W}$$

在 Ω 上全纯。由定理 11.4 知

$$\frac{1}{|W|} = |\varphi(0)| \leqslant \sup_{|z| = \rho} |\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{\delta - |W|}$$

导出 $|W| \geqslant \frac{1}{2}\delta$、$\{W \in C \mid |W| < \frac{1}{2}\delta\} \subset f(\Omega)$。

(2) 第二步。对于一般情况，设 $a \in \Omega$、U 为 a 的凸邻域且 $U \subset$

Ω,从定理11.3知,$f|_U \neq f(a)$。取$b\in U$、$f(b)\neq f(a)$;置

$$D=\{z\in C\,|\,a+z(b-a)\in u\}$$

命$g(z)=f(a+z(b-a))\quad(z\in D)$,于是$D$为包括0、1的凸集且$g(0)=f(a)\neq f(b)=g(1)$。依第一步,$g(D)$是$f(a)$的一个邻域,从而$f(U)\supset g(D)$。

最大模原理 设Ω为C^n内有界连通开集,f为Ω上的全纯函数,记$M=\sup\limits_{\zeta\in\partial D}\overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}|f(\zeta)|\,(z\in\Omega)$。如果$f$不是常数,那么对所有$z\in\Omega$,$|f(z)|<M$。

证明:设$M<\infty$,在紧致集$\overline{\Omega}$上定义函数φ为

$$\varphi(z)=|f(z)|\qquad \varphi(\zeta)=\overline{\lim_{z\to\zeta}}|f(z)|\qquad (z\in\Omega)$$

$\varphi(z)$在$\overline{\Omega}$上半连续,因此在$\overline{\Omega}$上有界。依开映射定理,$f(\Omega)=U$是有界开集。因为f是开的,所以对所有$W\in\partial U$具有$W=\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)$,这里$\{z_l\}$是收敛于$\partial\Omega$的某点的$\Omega$内的点列。于是$\partial U\subset\{W\in C\,|W|\leqslant M\}$。而$U$是有界开集,表明$U\subset\{W\in C\,\big|\,|W|<M\}$。

当f在C^n内连通开集Ω上全纯并有$a\in\Omega$时,$|f(z)|\leqslant|f(a)|$对所有$z\in\Omega$成立,这样f是常数。

定理11.5 如果Ω为C^n内的开集,$\{f_l\}$为Ω上的全纯函数列,它们在Ω的每个紧致子集上一致收敛,那么$f=\lim\limits_{l\to\infty}f_l$在$\Omega$上全纯,对于$\alpha\in N^n$、$\{D^\alpha f_l\}$在$\Omega$的每个紧致子集上收敛于$D^\alpha f$。

证明:设$a\in\Omega$、$\rho=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)$使$\overline{P}(a,\rho)\subset\Omega$,且

$$|z_j-a_j|<\frac{1}{2}\rho_j$$

推出

$$\begin{aligned}f(z)&=\lim_{l\to\infty}f_l(z)\\&=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta-a|=\rho}f_l(\zeta)\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)^{-1}\mathrm{d}^n\zeta\\&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta)\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)^{-1}\mathrm{d}^n\zeta\end{aligned}$$

利用柯西公式，f 在 a 的邻域内全纯。当

$$|z_j - a_j| \leqslant \frac{1}{2}\rho_j$$

时，有

$$\begin{aligned}\frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)^{-\alpha_j-1} \mathrm{d}^n\zeta \\ &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta-a|=\rho} f_l(\zeta) \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)^{-\alpha_j-1} \mathrm{d}^n\zeta \\ &= \lim_{l\to\infty} \frac{D^\alpha f_l(z)}{\alpha!}\end{aligned}$$

定理 11.6 如果 $\mathscr{F}=\{f\}$ 为 Ω 上的全纯函数族，且对任意紧致集 $K\subset\Omega$，存在 $M=M_K>0$ 使对所有 $z\in K$、$f\in\mathscr{F}$，有

$$f(z) < M$$

那么任意序列 $\{f_l\}$($f_l\in\mathscr{F}$)包括一个子序列，它们在 Ω 的紧致子集上一致收敛。

证明：对于 $a\in\Omega$、$f\in\mathscr{F}$，设 $\sum\limits_\alpha c_\alpha(f,a)(z-a)^\alpha = f(z)$ 在 a 的一个邻域内成立。应用柯西公式，这个级数在一个与 f 无关的多圆柱 $P(a,\rho)$ 内收敛。从定理 11.4 和对 $\mathscr{F}$ 的假定，存在 $c>0$ 使

$$|c_\alpha(f,a)| \leqslant \frac{c}{r^\alpha}$$

式中 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 满足 $0<r_j<\rho_j$。于是当 $\{f_l\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的元素组成的序列时，采用对角线法可找到一个子序列 $\{f_{l_k}\}$；对 $k\to\infty$、对所有 $\alpha\in N^n$，$c_\alpha(f_{l_k},a)$ 收敛。从而得到 $\{f_{l_k}\}$ 在 a 的一个邻域中一致收敛。事实上，取 $U=P(a,r')$ 使 $0<r'_j<r_j<\rho_j$，于是对所有 $z\in U$，

$$|f_{l_k}(z) - f_{l_p}(z)| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant N} |c_\alpha(f_{l_k} - f_{l_p},a)| + 2C_o \sum_{|\alpha|>N} r^{-\alpha} r'^{\alpha}$$

依 $r'_j<r_j$，当 $N\to\infty$ 时上式右边最后一项趋近于零。进一步，对每个 α，当 k、$p\to\infty$ 时 $c_\alpha(f_{l_k}-f_{l_p},a)\to 0$。即有

$$\sup_{z\in U} |f_{l_k}(z)-f_{l_p}(z)| \to 0$$

若 $\{U_q\}_q=1,2,\cdots$ 为覆盖 Ω 的开集序列，$\mathscr{F}$ 的元素构成的任

意序列，对每个q均有一个子序列在U_q上一致收敛，则对任意序列到$\{f_l\}(f_l\in\mathscr{F})$，采用对角线法可找到一个子序列在每个$U_q$上都一致收敛。该序列在$\Omega$的每个紧致子集上一致收敛。

定义 11.3 一个在连通开集$\Omega\subset C^n$中的子集A称作唯一性集，当任何Ω上的全纯函数f在A上为0时$f\equiv 0$在Ω上成立。

定理11.7 设$\{f_\nu\}$为在连通开集Ω上的全纯函数序列和A为Ω内的唯一性集。若$\{f_\nu\}$在Ω上一致有界且对所有$a\in A$使$\{f_\nu(a)\}$收敛，则$\{f_\nu\}$在Ω的紧致子集上一致收敛。

证明：如果$\{f_\nu\}$不在Ω的紧致子集上一致收敛，那么可以找到紧致子集$K\subset\Omega$及$\{\nu\}$的子序列$\{\nu_k\}$、$\{\mu_k\}$和$\delta>0$，对$\{z_k\}\subset K$有

$$|f_{\nu_k}(z_k)-f_{\mu_k}(z_k)|\geqslant\delta$$

依定理11.6，若有必要可用$\{\nu_k\}$、$\{\mu_k\}$的子序列替代$\{\nu_k\}$、$\{\mu_k\}$，于是可设$\{f_{\nu_k}\}$、$\{f_{\mu_k}\}$在Ω的紧致子集上一致收敛，同时$z_k\to z_0\in K$，表明：

$$|f(z_0)-g(z_0)|\geqslant\delta>0$$

另外，对所有$a\in A$，利用$\{f_\nu(a)\}$的收敛性知

$$f(a)-g(a)=\lim_{k\to\infty}[f_{\nu_k}(a)-f_{\mu_k}(a)]=0$$

注意到A是唯一性集，故$f-g\equiv 0$，矛盾。

定理 11.8 设B为平面C上的半带形：$a<\mathrm{Re}(z)<b$、$\mathrm{Im}(z)>0$；而Ω为C^{n-1}中的连通开集，$\Omega=B\times\Omega'$及f为Ω上的有界全纯函数。如果对于$c\in(a,b)$，有

$$\lim_{y\to\infty}f(c+iy,z')=g(z')$$

成立，同时对Ω'的任意紧致子集内的z'是一致的，那么对所有$\varepsilon>0$的区间$x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$和$\Omega'$上的任意紧致子集，当$y\to\infty$时$f(x+iy,z')\to g(z')$是一致的。

证明：设f_l为Ω上的全纯函数，其定义为

$$f_l(z,z')=f(z+il,z')$$

导出$\{f_l\}$为一致有界。依假设，

$$\lim_{y\to\infty}f(c+iy,z')=g(z')$$

表明

$$\lim_{l\to\infty} f_l(z,z') = g(z')$$

在集合$A=\{(z,z')\in\Omega \mid \mathrm{Re}(z)=c, 0<\mathrm{Im}(z)<1\}$上成立。考虑到$A$是唯一性集，从定理11.7推得定理11.8。

11.2 解析开拓

11.2.1 全纯函数从多圆柱边界的开拓

如果Ω为C中的连通开集且$a\in C\setminus\Omega$，那么存在一个在Ω上的全纯函数f不能解析开拓到a点；但当$n>1$时此情况在C^n内不成立。

定理11.9 设$P=\{z\in C^n \mid |z_j|<1, n>1\}$。若$V$是$\partial P$的一个邻域并使$V\cap P$连通，则每个在$V$上全纯函数$f$，存在在$P\cup V$上的全纯函数$F$使$F|_V=f$。

证明：取$\varepsilon>0$，集合$A\subset V$，而

$$A=\{z\in C^n \mid 1-\varepsilon<|z_1|<1, |z_j|<1, j\geqslant 2\}\cup \{z\in C^n \mid 1-\varepsilon<|z_2|<1, |z_j|<1, j\neq 2\}$$

命$z'=(z_2,z_3,\cdots,z_n)$，当$|z'|<1$时函数$z_1\to f(z_1,z')$为在环$\{z_1\in C \mid 1-\varepsilon<|z_1|<1\}$上的全纯函数，结果

$$f(z_1,z')=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu(z')z_1^\nu$$

对所有$\nu\in z$，$a_\nu(z)$在$P'=\{|z_2|<1,|z_3|<1,\cdots,|z_n|<1\}$上全纯。今当$1-\varepsilon<|z_2|<1$、$|z_3|<1$、…、$|z_n|<1$时函数$z_1\to f(z_1,z')$在圆盘$|z_1|<1$内全纯，于是罗朗级数不包括$z_1$的负幂次项；也就是$a_\nu(z')=0$对$\nu<0$及$1-\varepsilon<|z_2|<1$成立。根据定理11.3，对$\nu<0$、$z'\in P'$有$a_\nu(z')=0$。记

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in V) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')z_1^\nu & (z\in P) \end{cases}$$

其中$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')z_1^\nu$为在$P$的紧致子集上一致收敛的幂级数，故为全

纯，并且在$V\cap P$的一个非空开子集上等于f。因为$V\cap P$是连通的，所以在整个$V\cap P$上等于f。

11.2.2 Reinhardt 域

定义11.4 设Ω为C^n内的连通开集，称Ω为Reinhardt 域（简记Rt），当$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\Omega$及$\theta_1$、$\theta_2$、$\cdots$、$\theta_n\in R$时$(z_1e^{i\theta_1},z_2e^{i\theta_2},\cdots,z_ne^{i\theta_n})\in\Omega$。

定理11.10 若Ω为C^n内的Rt 域，则对Ω上任意全纯函数f，有罗朗级数

$$\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \qquad (\alpha\in Z^n)$$

在Ω的紧致子集上一致收敛于f，且a_α是由f唯一确定的。

证明：关于唯一性。设点$w\in\Omega$，其坐标为$(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ $(w_j\neq 0)$，级数$\sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha$在$\Omega$的紧致子集上一致收敛。取$z_j=w_je^{i\theta_j}$，再乘以$\exp[-i(\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2+\cdots+\alpha_n\theta_n)]$并逐项积分，得到

$$a_\alpha=\frac{1}{w^\alpha(2\pi)^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(w_1e^{i\theta_1},w_2e^{i\theta_2},\cdots,w_ne^{i\theta_n})\cdot$$
$$\exp[-i(\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2+\cdots+\alpha_n\theta_n)]\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_n$$

关于存在性。注意到若

$$D=\{z\in C^n\,|\,r_j<|z_j|<R_j,0<r_j<R_j;j=1,2,\cdots,n\}$$

和f在D上全纯，则依单复变函数理论得到f的一个罗朗级数展开式。

设$w\in\Omega$、对$\varepsilon>0$充分小，由于Ω为Rt 域，因此集合

$$D(w,\varepsilon)=\{z\in C^n\,\big|\,|w_j|-\varepsilon<|z_j|<|w_j|+\varepsilon\}$$

包括在Ω内。当$D(w,\varepsilon)$为具有上述D形式的集合时存在罗朗展开式

$$\sum_{\alpha\in Z^n}a_\alpha(w)z^\alpha=f(z) \qquad z\in D(w,\varepsilon)$$

它是在w的一个邻域内一致收敛于f的。今如果有：$w'\in D(w,\varepsilon)$及$\sum\limits_\alpha a_\alpha(w')z^\alpha(\alpha\in Z^n)$是对应于$w'$在集合$D(w',\varepsilon)\subset\Omega$中的展开，那么唯一性表明$a_\alpha(w)=a_\alpha(w')$。

对所有$\alpha\in Z^n$，函数$w\to a_\alpha(w)$在Ω上为局部常值。由于Ω连通，因此$a_\alpha(w)=a_\alpha$与w无关；但级数$\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$在$\Omega$的任意一点的邻域内一致收敛于$f(z)$。结果当$z$在$\Omega$的任意紧致子集时级数一致收敛于$f(z)$。

设Ω为Rt域。若对每个$j\in[1,n]$，存在点$z\in\Omega$，其第j个坐标为零，则在Ω内的任意全纯函数f允许有一个展开式

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \qquad (\alpha\in Z^n)$$

它在Ω的紧致子集上一致收敛。

如果Ω为Rt域且当对每个$j\in[1,n]$，有点$z\in\Omega$，其第j个坐标为零，那么在Ω上的任意全纯函数f，存在集合

$$\omega=\{(\rho_1z_1,\rho_2z_2,\cdots,\rho_nz_n)\mid 0\leqslant\rho_j\leqslant 1,(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\Omega\}$$

上全纯扩充F；即有一个在ω上唯一的全纯函数F，使$F|_\Omega=f$。

取f全纯于

$$r<|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2<R_0 \qquad (0<r<R_0)$$

结果f可全纯扩充(开拓)到$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2<R$。

现有$a\in C^n$。考虑对子集(U,f)，而U为C^n中的开集且$a\in U$、f为U上的全纯函数；两个对子集(U,f)、(V,g)称为等价，当有a的一个邻域$W\subset V\cap U$，使$f|_W=g|_W$。此等价关系的一个等价类称作在a点的全纯函数芽。如果不发生混淆，那么可用一个表达该等价类的函数来等同这个等价类。将一个在a点的芽f_a在a点的值记作$f_a(a)$，同时f_a的任意阶(次)导数在a点的值也有明确的定义。

以$\mathcal{O}_a$表示所有在a点全纯函数芽的集合，$\mathcal{O}_a$成环。层$\mathcal{O}=\bigcup_a\mathcal{O}_a(a\in C^n)$，当$f\in\mathcal{O}_a$时存在映射$p:\mathcal{O}\to C^n$定义为$p(f)=a$。今在$\mathcal{O}$上定义拓扑：设$f_a\in\mathcal{O}_a$且对子集$(U,f)$是定义$f_a$的。令

$$N(U,f)=\{f_b\mid b\in U\}$$

式中f_b为依对子集(U,f)所定义的在b点的芽。当(U,f)遍历所有定义f_a的对子集时，所有集$N(U,f)$组成f_a的邻域的基本系，于是称$\mathcal{O}$为C^n上的全纯函数芽层。

定理 11.11 映射 $p:\mathscr{O}\to C^n$ 为连续的。

实际上，设 $f_a\in\mathscr{O}_a$，有 $p(f_a)=a$。当 V 是 a 的一个邻域且 (U,f) 为定义 f_a 的对子集时 $p(N(U\cap V,f))\subset V$。

定理 11.12 $\mathscr{O}$ 定义上述拓扑之后就是一个豪斯道夫空间。

证明：设 f_a、$g_b\in\mathscr{O}(f_a\neq g_b)$，当 $p(f_a)\neq p(g_b)$ 时可以找到在 C^n 内的分别包括 $p(f_a)$、$p(g_b)$ 的不相交开集 Ω_a、Ω_b，于是 $p^{-1}(\Omega_a)$、$p^{-1}(\Omega_b)$ 为分别包括 f_a、g_b 的不相交开集。

若 $p(f_a)=p(g_b)$，则 f_a、$g_b\in\mathscr{O}_a$。取 (U,f)、(U',g) 分别为定义 f_a、g_b 的对子集以及 V 是 a 的一个连通邻域而且 $V\subset U\cap U'$，表明 $N(V,f)$、$N(V,g)$ 是不相交的。事实上，如果 $x\in N(V,f)\cap N(V,g)$，那么 f 和 g 在 $p(x)$ 的一个邻域相同；依 V 的连通性，故 $f\equiv g$ 在 V 上成立；尤其是 $f_a=g_b$ 导致与假设矛盾。

定理 11.13 映射 $p:\mathscr{O}\to C^n$ 为局部同胚，即对所有 $x\in\mathscr{O}$ 有一个邻域 N 使 $p|_N$ 是同胚于 C^n 的开集。

证明：如果 $x\in f_a$、$N=N(U,f)$，式中 (U,f) 定义 f_a，那么 $p(N)=U$。$p|_N$ 的逆定义是依 $b\to f_b(b\in U)$，f_b 如同前面表述的 (U,f) 定义的 b 点的芽所给出的。

定义 11.5 豪斯道夫拓扑空间 X 称为(实)n 维流形，如果 X 的每个点存在一个开邻域同胚于 R^n 内的一个开集。

取 X 为 n 维流形、X' 为豪斯道夫拓扑空间。称连续映射 $p:X'\to X$ 为局部同胚，如果对每个点 $a'\in X'$，存在 a' 的一个开邻域 U' 使 $p(U')$ 在 X 内是开的且 $p|_{U'}$ 为到 $p(U')$ 上的同胚，注意这时 X' 自然带有一个流形结构。

若 $p:X'\to X$ 为局部同胚，则称 (X',p,X) 为一个 X 上的(非分支)域。当 p 可表述清楚时称 X' 为 X 上的域。

命 $p:X'\to X$ 为一个 X 上的域、Y 为一个豪斯道夫拓扑空间，$f:Y\to X$ 是连续映射；f 到 X' 的提升为连续映射 $f':Y\to X'$ 使 $p\circ f'=f$。

定理 11.14 设 Y 为连通的，f_1、$f_2:Y\to X'$ 为 f 的两个提升。若对点 $y_0\in Y$ 存在 $f_1(y_0)=f_2(y_0)$，则 $f_1\equiv f_2$。

证明：设$E=\{y\in X\mid f_1(y)=f_2(y)\}$。显见$E$是闭的、非空的。如果对$a\in Y$，且$b=f_1(a)=f_2(a)$，又取$U'$为$b$的一个邻域使$p|_{U'}$为到$X$的一个开集$U$上的同胚，又取$V$是$a$的一个邻域使$f_1(V)$、$f_2(V)\subset U'$而$f(V)\subset U$，那么

$$f_1\Big|_V=(p\Big|_{U'})^{-1}\circ f=f_2\Big|_V$$

表示E是开的。考虑到Y的连通性，有$E=Y$，即$f_1\equiv f_2$。

定义11.6 设X为豪斯道夫拓扑空间。X内的一条弧为连续映射$\gamma:I\to X(I=[0,1]\subset R)$，$X$内的一条围线是弧$\gamma$满足$\gamma(0)=\gamma(1)$；对一条弧$\gamma$，$\gamma(0)$称其为起点、$\gamma(1)$称其为终点。

单值定理 设$I=[0,1]$与$p:X'\to X$是X上的一个域，$a\in X$、$a'\in p^{-1}(a)$；取$F:I\times I\to X$为连续映射使对所有$u\in I$，有$F(0,u)=a$；对所有$u\in I$，令γ_u为X内的弧$t\to F(t,u)$。

若对所有$u\in I$，存在从γ_u到X'上的提升γ'_u使$\gamma'_u(0)=a'$，则依$(t,u)\to\gamma'_u(t)$定义的映射

$$F':I\times I\to X'$$

是连续的。

特别是，当$F(1,u)=b$与$u\in I$无关时$F'(1,u)=b'$。

证明：取u_0、$t_0\in I$。为证F'在(t_0,u_0)内连续，采用如下方法进行。设$\{U'_1,U'_2,\cdots,U'_p\}$是$\gamma'_{u_0}(I)$的有限开覆盖，其使$p_j=p|_{U'_j}$为到$U_j\subset X$上的同胚；设$0=\tau_0<\cdots<\tau_p=1$是$I$的一个分割，当$\tau_{j-1}<t<\tau_j$时$\gamma'_{u_0}(t)\in U'_j$；设$\varepsilon>0$，当$|u-u_0|<\varepsilon$、$\tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j$时$\gamma_u(t)\in U_j$，于是当$t\in[\tau_{j-1},\tau_j]$、$|u-u_o|<\varepsilon$时$\gamma'_u(t)=p^{-1}\circ F(u,t)$。事实上，$\gamma'_u$、$t\to p_1^{-1}\circ F(u,t)$为$t\to F(u,t)(\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1)$的两个提升，其在$t=0$处均为$a'$，利用定理11.14知

$$\gamma'_u(t)=p_1^{-1}\circ F(u,t)$$

今假定已对某个$j\in[1,p)$证明了当$\tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j$、$|u-u_0|<\varepsilon$时

$$\gamma'_u(t)=p_j^{-1}\circ F(u,t)$$

显然$\gamma'_{u_0}(\tau_j)=p_j^{-1}$。$F(u_0,\tau_j)=p_{j+1}^{-1}\circ F(u_0,\tau_j)$。进一步，$p_j^{-1}\circ$

$F(u,\tau_j)$、$p_{j+1}^{-1}\circ F(u,\tau_j)$为$u\to F(u,\tau_j)$、$|u-u_0|<\varepsilon$的两个提升，它们在$u=u_o$处重合，再依定理11.14得$\gamma'_u(t)=p_{j+1}^{-1}\circ F(u,t)$，当$\tau_j\leqslant t\leqslant\tau_{j+1}$、$|u-u_o|<\varepsilon$时成立。由归纳知，对于$\tau_{j-1}\leqslant t\leqslant\tau_j$、$|u-u_o|<\varepsilon(j=1,2,\cdots,p)$，有

$$F'(u,t)=\gamma'_u(t)=p_j^{-1}\circ F(u,t)$$

从此推出：对任何$t\in I$，F'在(t,u_o)内连续。

定义11.7 设$p:X'\to X$为X上的域。如果对每个点$a\in X$、存在一个邻域U，使$p^{-1}(U)$是开集U'_j的不连通和(disjoint union)而且对每个j，$p|_{U'_j}$是到U上的同胚，故称p为一个覆盖(映射)。

定义11.8 流形X称为单连通，如果它是连通的并且对每条围线$\gamma:I\to X(I=[0,1])$有连续映射$F:I\times I\to X$，使

$$F(t,0)=\gamma(t)\qquad F(t,1)=\gamma(1)=\gamma(0)\qquad(\text{对任何}\ t\in I)$$

$$F(0,u)=F(1,u)=\gamma(0)\qquad(\text{对任何}\ u\in I)$$

定理11.15 若$p:X'\to X$为覆盖映射，且$a'\in X'$、$a=p(a')$，则对任意弧$\gamma:I\to X$；对$\gamma(0)=a$，有提升$\gamma':I\to X'$；$\gamma'(0)=a'$。

证明：找到I的点$0=t_0<t_1<\cdots<t_p=1$及开集$U_j\subset X$使对$t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}(j=0,1,2,\cdots,p-1)$有

$$\gamma(t)\in U_j$$

$p^{-1}(U_j)=U'_{ij}$为不连通和并对每个i，$p_{ij}=p|_{U'_{ij}}$是到U_j上的同胚。

当$t_0\leqslant t\leqslant t_1$时定义$\gamma'(t)=p_{i0}^{-1}\gamma(t)$，这里$i$的选取使$a'\in U'_{io}$。若$\gamma'$已对$f\in[0,t_j](j<p)$有定义，则对$t\in[t_j,t_{j+1}]$定义$\gamma'(t)=p_{kj}^{-1}\gamma(t)$，其中$k$的选取使$\gamma'(t_j)\in U'_{kj}$。

依定理11.15知，当$p:X'\to X$为覆盖映射且X、X'连通而X为单连通时p是一个同胚。

定理11.16 若$p:X'\to X$为X上的域，X、X'连通，则p为覆盖映射当且仅当对任何$a'\in X'$、$a=p(a')$以及任意弧$\gamma:I\to X$，同时$\gamma(0)=a$有提升$\gamma':I\to X'$而$\gamma'(0)=a'$。

实际上，因为所有$a\in X$存在一个邻域U同胚于R^n内的一个凸集，所以U为单连通。利用单值定理、定理11.15即得结果。

定理 11.17 设 $p:X'\to X$ 为覆盖映射，Y 为单连通流形，$f:Y\to X$ 为连续映射。如果 $a'\in X'$ 且 $p(a')=a=f(y_0)(y_0\in Y)$，那么 f 为提升 $f':Y\to X'$ 并有 $f'(y_0)=a'$。

可取 $Z=Y\times X'$，$Y'=\{(y,x')\in Z\mid f(y)=p(x')\}$，$\pi:Y'\to Y$ 为映射 $(y,x')\to y$。可以断言：$\pi:Y'\to Y$ 为覆盖映射。事实上，设 $y\in Y$，$f(y)=x$，U 为 x 的一个邻域使 $p^{-1}(U)=\bigcup\limits_j U'_j$ 成为不连通和，并且 $p_j=p\Big|_{U'_j}$ 是到 U 上的同胚。设 V 是 Y 内 y 的一个邻域，有 $f(V)\subset U$，于是 $\pi^{-1}(V)=\bigcup\limits_j V'_j$，式中 $V'_j=\{(y,x')\in Z\mid x'=p_j^{-1}\circ f(y),y\in V\}$ 是从 V 到 X' 内的连续映射 $p_j^{-1}\circ f$ 的集。显见 $\pi\Big|_{V'_j}$ 是到 V 上的同胚。

若 Y'_0 是 Y' 的包括 (y_0,a') 的连通分量，则 $\pi\Big|_{Y'_0}$ 为覆盖映射。因为 Y、Y'_0 连通又 Y 单连通，由定理 11.15 知 $\pi_0=\pi\Big|_{Y'_0}$ 为同胚。当 π' 是从 Z 到 X' 内的映射 $(y,x')\to x$ 在 Y'_0 上的限制时可置

$$f'(y)=\pi'\circ\ \pi_0^{-1}(y)$$

当 Ω 为 C^n 内的单连通域和 f 是 Ω 上的全纯函数且无处是零时在 Ω 上存在全纯函数 g 使 $e^g=f$。

实际上，设 $C^*=C\setminus\{0\}$。映射 $p:C\to C^*$，$p(z)=e^z$ 为覆盖映射，依假定 f 为映射 $f:\Omega\to C^*$，依定理 11.17 知有连续映射 $g:\Omega\to C$，取 $f=p\circ g=e^g$，显见当 f 全纯时 g 也全纯。

定理 11.18 设多圆柱 $P=\{z\in C^n\mid |z_j-a_j|<\rho_j\}$。当 g_1、g_2、…、g_n 在 P 上全纯并符合

$$\frac{\partial g_j}{\partial z_k}=\frac{\partial g_k}{\partial z_j}\qquad (j、k\in[1,n])$$

时在 P 上存在全纯函数 f 使

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=g_j\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

成立，且 f 在相差一个常数的意义下是唯一的。

证明：唯一性是显然的。只需证明存在性；应用归纳法。当 $n=1$ 时在 P 上

$$g_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z-a)^\nu$$

取 $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu+1}(z-a)^{\nu+1}$

设对 C^{n-1} 的情况也成立，记

$$g_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})z_n^\nu$$

$$f_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})}{\nu+1}z_n^{\nu+1}$$

于是 $\frac{\partial f_n}{\partial z_n}=g_n$。令 $h_j=g_j-\frac{\partial f_n}{\partial z_j}(j=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_k}=\frac{\partial h_k}{\partial z_j}\qquad (j、k\in[1,n])$$

因为 $h_n\equiv 0$，所以 $\frac{\partial h_j}{\partial z_n}=0(j=1,2,\cdots,n-1)$；表明 h_j 与 z_n 无关。依归纳法假定，有 f_0 在

$$P_0=\{z\in C^{n-1}\,\big|\,|z_j-a_j|<\rho_j,j=1,2,\cdots,n-1\}$$

上全纯，同时

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_j}=h_j$$

取 $f=f_0+f_n$ 即为所求。

定理 11.19 设 Ω 为 C^n 内的单连通域，给定 Ω 上的全纯函数 $g_1、g_2、\cdots、g_n$，使

$$\frac{\partial g_j}{\partial z_k}=\frac{\partial g_k}{\partial z_j}\qquad (j、k\in[1,n])$$

于是在 Ω 上有全纯函数 f，使

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=g_j\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

证明：设 $\mathscr{O}$ 为 C^n 上的全纯函数的芽层 $p:\mathscr{O}\to C^n$ 为投影，直积

$\mathscr{O}^n=\underbrace{\mathscr{O}\times\mathscr{O}\times\cdots\times\mathscr{O}}_{n个}$是所有$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$适合$p(\varphi_1)=p(\varphi_2)=\cdots=p(\varphi_n)$的元素组成的子集，这样$p$定义了映射$\pi:\mathscr{O}^n\to C^n$，它是局部同胚。

设$X_0=\left\{(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)\in\mathscr{O}^n\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_j},j、k\in[1,n]\right.\right\}$，则$X_0$为$\mathscr{O}^n$中的又开又闭的子集且$\pi\Big|_{X_0}=\pi_0$是从$X_0$到$C^n$内的局部同胚。

设$\psi:\Omega\to X_0$为映射$z\to((g_1)_z,(g_2)_z,\cdots,(g_n)_z)$，这里$(g_j)_z$表示函数$g_j$在$z$点的芽，令$X=\psi(\Omega)$，则$\psi$是从$\Omega$到$X$上的同胚，尤其是$X$为单连通时

映射$\eta:\mathscr{O}\to X_0$的定义是：

$$(f)_a\to\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_a,\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)_a,\cdots,\left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)_a\right)$$

式中a表示a点的芽。为此证明η为覆盖映射。实际上，取$(\varphi_{1a},\varphi_{2a},\cdots,\varphi_{na})\in\pi_0^{-1}(a)\subset X_0(a\in C^n)$，$p(a,\rho)$为多圆柱，$\varphi_1$、$\varphi_2$、$\cdots$、$\varphi_n$在$p(a,\rho)$上全纯且分别定义$\varphi_{1a}$、$\varphi_{2a}$、$\cdots$、$\varphi_{na}$。取$f$为$p(a,\rho)$上的全纯函数而$\frac{\partial f}{\partial z_j}=\varphi_j$在$p(a,\rho)$上成立。如果$U=\{(\varphi_{1b},\varphi_{2b},\cdots,\varphi_{nb})\mid b\in p(a,\rho)\}$，那么$\eta^{-1}(U)$的每一个连通分量$V$形如$N(p(a,\rho),f')$，这里$f'=f+c(c\in C)$，显然$\eta\Big|_V$同胚于$U$。

设X'为$\eta^{-1}(X)$的一个连通分量，于是$\eta:X'\to X$为覆盖映射，X'、X连通。利用定理11.15知η为同胚。

今定义Ω上的全纯函数f为$f(z)$等于芽$\eta^{-1}\circ\psi(z)$在z点的值，$f'_z\in X'$使$p(f'_z)=z$，显见$\frac{\partial f}{\partial z_j}=g_j(j=1,2,\cdots,n)$。

定理11.20 设X为豪斯道夫拓扑空间且存在开集可数基，Y是连通流形。设有连通映射$f:Y\to X_0$且对任何$x\in X$，$f^{-1}(x)$为离散的，即对任何$a\in f^{-1}(x)$，在Y内有a的一个邻域U，使$U\cap f^{-1}(x)=\{a\}$，于是Y有开集可数集。

显然$\mathscr{O}$的任意连通分量具有可数基。

定义 11.9 设$p:X\to C^n$为C^n上的域。连续函数$f:X\to C$称为(关于p)全纯，如果对每个$a\in X$，存在a的一个邻域U使

(1) $p\Big|_U$是到开集$V\subset C^n$上的同胚；

(2) 函数$f\circ(p\Big|_U)^{-1}$在V上全纯。

定义f的导数$D^\alpha f$，

$$D^\alpha f\circ(p\Big|_U)^{-1}=D^\alpha(f\circ(p\Big|_U)^{-1})$$

式中U同(1)；等式右边的导数是对V上函数而定。

定义 11.10 设$p:X\to C^n$、$p':X'\to C^m$分别为C^n、C^m上的域。连续映射$u:X\to X'$称为全纯，如果对任意开集$V'\subset X'$，f'在V'上全纯，函数$f'\circ u$在$u^{-1}(V^1)$上全纯。

取Ω为C^n内的连通开集、f为Ω上的全纯函数，$p:X\to C^n$为C^n上的连通域。如果有一个全纯映射$u:\Omega\to X$和X上的全纯函数g，使

(1) $p\circ u$为从Ω到C^n内的内射；

(2) $g\circ u=f$；

那么称f，可解析开拓到X。

定理 11.21 设$p:X\to C^n$、$p':X'\to C^m$分别为C^n、C^m上的域，而X连通且f、$g:X\to X'$是两个全纯映射。若$f=g$在X的一个非空开集上成立，则$f\equiv g$。

证明：设E为集合$(a\in X)$，$f=g$在a的一个邻域中成立。显然E是开的，现证明它是闭的，从$f=g$在E上成立知$f=g$在$\overline{E}$上成立。取$b\in\overline{E}$及

$$y_0=f(b)=g(b)$$

命V是y_0的一个开邻域使$p'\Big|_V$是到C^m的一个开集W上的同胚。设U为b的开邻域，而$p\Big|_U$同胚于C^n内的一个多圆柱p并且$U\subset f^{-1}(V)\cap g^{-1}(V)$，则$p'\circ f\circ p^{-1}$、$p'\circ g\circ p^{-1}$均为从$P$到$W$内的全纯映射，并在开集$p(E\cap U)$上相同，由$b\in\overline{E}$，即$p(E\cap U)$非空。结果$p'\circ f\circ p^{-1}=p'\circ g\circ p^{-1}$在$P$上成立，由于$p'\Big|_V$为同胚，推知$f=g$在$U$上成立，即$U\subset E$。注意到$b\in E$，知$E$为闭的。

定理11.22 对C^n内连通开集Ω上的每个全纯函数f,存在一个连通域$p:X\to C^n$及一个f到X的解析开拓具有下述性质:

对任何连通域$p':X'\to C^n$与f到X'的解析开拓g',有全纯映射$\varphi:X'\to X$使$p\circ\varphi=p'$、$f\circ\varphi=f'$。

事实上,设X为包括f_a的$\mathscr{O}$的连通分量($a\in\Omega$),f_a是f在a点定义的芽;设$p:X\to C^n$为从$\mathscr{O}$到C^n的投影在X上的限制。$g:X\to C$定义是:$g(k_z)$等于k_z在z点的值(k_z是在z点的芽);设$u:\Omega\to\mathscr{O}$为映射,$u(z)=f$为在z类的芽。显见u连续。依Ω的连续性知$u(\Omega)\subset X$,故有映射$u:\Omega\to X$,而从Ω到C^n内的内射$g\circ u=f$。

若$p':X'\to C^n$为C^n上的另一个连通域,$u':\Omega\to X'$及$g':X'\to C$定义了f到X'的一个解析开拓,则定义$\varphi:X'\to X$是:

设$x'\in X'$、$a'=p'(x')$,U'为x'的一个邻域且p'将其同胚映射为C^n的一个开子集U,在U上命$h=g'\circ p'^{-1}$。取$\varphi(x')$为h在a'的芽,由于X'连通,因此给出连续映射$\varphi:X'\to\mathscr{O}$。显然$\varphi(u'(\Omega))\subset X$;因$X'$连通,于是可给出映射$\varphi:X'\to X$。

11.3 次调和函数

11.3.1 次调和函数性质

定义11.11 设Ω为C内的开集。如果$\nabla^2 u=0$,那么称u为Ω内的调和函数。

定义11.12 设s为Ω上的实值函数($s\neq+\infty$)。如果对任意$U\overset{*}{\subset}\Omega$,存在

$$s(z)\leqslant\sup_{\zeta\in\partial U}s(\zeta)\qquad(z\in U)$$

那么称极大值原理对s成立。

定理11.23 极大值原理对Ω上任意实调和函数成立。

定理11.24 如果对任意二阶(次)连续导数的实值函数u有$\nabla^2 u\geqslant 0$,那么极大值原理成立。

证明:只需讨论$\nabla^2 u>0$的情况。取

$$u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon|z|^2$$

推出

$$\nabla^2 u_\varepsilon = \nabla^2 u+4\varepsilon>0$$

于是

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(z)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}[\sup_{\zeta\in\partial U}u_\varepsilon(\zeta)]=\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta)$$

设 $\nabla^2 u>0$ 在 Ω 上处处成立且 $u(a)\geqslant\sup_{\zeta\in U}u(\zeta)(a\in U)$；对 $U\overset{*}{\subset}\Omega$，设 $\sup_{z\in U}u(z)=u(z_0)$，有 $z_0\in U$ 及函数

$$g(t)=u(x_0,t)$$

在 $t=y_0(z_0=x_0+iy_0)$ 有极大值

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(z_0)&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(y_0)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}[g(y_0+h)-2g(y_0)+g(y_0-h)]\leqslant 0\end{aligned}$$

同理，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(z_0)\leqslant 0$，表明 $\nabla^2 u(z_0)\leqslant 0$，导致矛盾。

定理 11.25 设 $a\in C$、$\rho>0$ 以及对 $|z-a|<\rho$、$0<\theta\leqslant 2\pi$。若

$$P(z,\theta)=P_{a\rho}(z,\theta)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{\rho e^{i\theta}+(z-a)}{\rho e^{i\theta}-(z-a)}\right]$$

则 $P(z,\theta)\geqslant 0$ 并且当 $h(\theta)$ 为 $h(0)=h(2\pi)$ 的连续函数时对 $z_0=a+\rho e^{i\theta_0}$，有

$$\lim_{z\to z_0}\int_0^{2\pi}P(z,\theta)h(\theta)\mathrm{d}\theta = h(\theta_0)$$

此极限关于 θ_0 是一致的。

证明：假定 $a=0$、$\rho=1$、$h(\theta)=\varphi(e^{i\theta})$，式中 φ 在 $|z|=1$ 上连续。令

$$P_{01}(z,\theta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

这样 $P(z,\theta)\geqslant 0$，且对 $|z|<1$

$$\int_0^{2\pi}P(z,\theta)\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta - z}{\zeta + z}\mathrm{d}\zeta\right] = 1$$

当 $|z|<1$ 时

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} P(z,\theta)h(\theta)\mathrm{d}\theta - h(\theta_0) \\ &= \int_0^{2\pi} P(z,\theta)[\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta_0})]\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

取 $\varepsilon>0$ 知有 $\delta>0$，当 $|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|<\delta$ 时

$$|\varphi(e^{i\theta})-\varphi(e^{i\theta_0})|<\varepsilon$$

故因 $P\geqslant 0$，得

$$|T| \leqslant \varepsilon\int_0^{2\pi} P(z,\theta)\mathrm{d}\theta + 2M\int_A P(z,\theta)\mathrm{d}\theta$$

式中 $A=|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geqslant\delta$、$M=\sup\limits_{\theta}|\varphi(e^{i\theta})|$。依 $\int_0^{2\pi} P(z,\theta)\mathrm{d}\theta = 1$ 及

$$P(z,\theta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

推知：若 $|z-e^{i\theta_0}|\to 0$，则 $P(z,\theta)$ 在 A 上一致趋近于零。由 $\lim\limits_{z\to e^{i\theta_0}}|T|\leqslant\varepsilon$，并考虑到 $\varepsilon>0$ 的任意性，表明结论正确。

应用定理11.25知：每个调和函数为 (x,y) 的实解析函数；并且

若 u 在 Ω 内调和 $(a\in\Omega)$，而

$$\{z\in C \mid |z-a|\leqslant\rho\}\subset\Omega$$

则对 $|z-a|<\rho$，得

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(z,\theta)u(a + \rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

实际上，取 u 为实值，函数

$$v(z) = \int_0^{2\pi} P(z,\theta)u(a + \rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

是全纯函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho e^{i\theta} + (z-a)}{\rho e^{i\theta} - (z-a)}u(a + \rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

在 $|z-a|<\rho$ 内的实部，即为调和的。

定义 11.13 设 u 为从 $\Omega\subset C$ 到 $R\cup\{-\infty\}$ 内的映射，且 $u(\Omega)\neq-\infty$，称 u 为上半连续，当对所有 $a\in\Omega$ 时

$$\overline{\lim_{z\to a}}u(z)\leqslant u(a)\qquad(z\neq a)$$

定义11.13 的等价定义是：当任何$\alpha\in R$ 时在Ω 中集合$\{z\in\Omega|u(z)<\alpha\}$为开集。

注意若u 为上半连续，则其在每个紧致集$K\subset\Omega$ 上有上界。因为K 是包括在开集$\{z\in\Omega|u(z)<v\}$的增序列之和集中，所以其必在某个之中。

定理11.26 若u 在Ω 内上半连续且有上界，则有一个Ω 上的连续函数的序列$\{u_k\}$使$u_k(z)$对所有$z\in\Omega$ 递减到$u(z)$。

证明：记$u_k(z)=\sup\limits_{\zeta\in\Omega}\{u(\zeta)-k|\zeta-z|\}$、$M=\sup\limits_{\zeta\in\Omega}u(\zeta)$。对所有$z\in\Omega$ 存在$u_k(z)\in(-\infty,+\infty)$，得

$$u_k(z)\geqslant u(z)-k|z-z|=u(z)$$

由于序列$u(\zeta)-k|\zeta-z|$，因此当k 增加时递减，也就是$u_k(z)$对每个z 递减。进一步，当z、$z'\in\Omega$ 时对任何$\zeta\in\Omega$，

$$u_k(z)\geqslant u(\zeta)-k|\zeta-z|\geqslant u(\zeta)-k|\zeta-z'|-k|z-z'|$$

导出

$$u_k(z)\geqslant u_k(z')-k|z-z'|$$

$$|u_k(z)-u_k(z')|\leqslant k|z-z'|$$

所以在Ω 上u_k 连续。

为证明当$k\to\infty$时有$u_k(z)\to u(z)$，假定$u(z)>-\infty$。取$\varepsilon>0$ 及$\Omega'=\{z'\in\Omega|u(z')<u(z)+\varepsilon\}$；$\Omega'$为$z$ 的一个邻域，其包括$|z'-z|<\delta$。取k_0 满足$M-k_0\delta<u(z)$，则$u(z')-k|z'-z|\leqslant u(z')<u(z)+\varepsilon$ 对$z'\in\Omega'$成立。另外$u(z')-k|z'-z|<M-k_0\delta<u(z)$，当$z'\notin\Omega'$时$k\geqslant k_0$ 时成立。也就是对于$k\geqslant k_0$，$u(z)\leqslant u_k(z)<u(z)+\varepsilon$，表明当$k\to\infty$时$u_k(z)\to u(z)$。如果$u(z)=-\infty$、$c>0$，那么

$$\Omega'=\{z'\in\Omega|u(z')<-c\}$$

包括$|z'-z|<\delta$，于是如前述假定，

$$u_k(z)\leqslant\max(-c,M-k\delta)$$

结果当$k\to\infty$时$u_k(z)\to-\infty$。

定义11.14 设开集$\Omega\subset C$、u为Ω的上半连续函数且在Ω的每个连通分量上$u\not\equiv-\infty$，称u是次调和函数，如果满足：

对于任意开集$U\overset{*}{\subset}\Omega$及任意$\overline{U}$上的实值连续函数$h$($h$在$U$上调和)，当$u(z)\leqslant h(z)$对任何$z\in\partial U$成立时$u(z)\leqslant h(z)$，则对任何$z\in U$也成立。

换句话说，对于任意开集$U\overset{*}{\subset}\Omega$及任意在$U$上调和的实值函数$h$，极大值原理对$u-h$成立。

定理11.27 若u在开集$\Omega\subset C$上次调和，则

(1) 集合$\{z\in\Omega\mid u(z)=-\infty\}$不包括非空集；

(2) 当$a\in\Omega$、$\rho>0$使$\{z\in C\mid |z-a|\leqslant\rho\}\subset\Omega$时

$$\int_0^{2\pi}|u(a+\rho e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta<+\infty$$

证明：(1) 设结论不成立。这样存在$a\in\Omega$、$\rho>0$使

$$K=\{z\in C\mid |z-a|\leqslant\rho\}\subset\Omega$$

并有$z_0\in K$使$u(z_0)>-\infty$、$u(z)=-\infty$在∂K的某个非空开子集上成立。取$\{u_k\}$在K的一个邻域上递减地趋近于u。令

$$h_k(z)=\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

表示h_k在K上连续、在$\mathring{K}$上调和。当$z\in\partial K$时，$h_k(z)=u_k(z)\geqslant u$。依次调和函数定义

$$u(z_0)\leqslant h_k(z_0)$$

从u_k递减地趋近于u和$P_{a\rho}(z_0,\theta)$是正的知

$$-\infty<u(z_0)\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}h_k(z_0)=\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z_0,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

该式与假定$u(a+\rho e^{i\theta})=-\infty$对$\theta$在$[0,2\pi]$的一个非空开集上成立矛盾。

(2) 设$K=\{z\in\mid |z-a|\leqslant\rho\}\subset\Omega$，$\{u_k\}$为在$K$上递减地趋近于$u$的连续函数序列，$M=\sup\limits_{z\in K}u_1(z)$。这样对任何$z\in K$，$u_k(z)\leqslant M$

成立。置

$u_{\bar{k}}=\min(u_k,0)$，又取 $z_0\in\mathring{K}$ 为 $u(z_0)>-\infty$ 的点，类似于(1)的证明

$$u(z_0)\leqslant\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z_0,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant MC^*+\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z_0,\theta)u_{\bar{k}}(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

这里 $C^*=\sup\limits_{\theta}2\pi P_{a\rho}(z_0,\theta)$。若记 $u^-=\min(u,0)$，则

$$\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z_0,\theta)\,|u^-(a+\rho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\leqslant MC^*-u(z_0)$$

注意到 $P_{a\rho}(z_0,\theta)\geqslant\delta>0$ 对所有 θ 成立，即

$$\int_0^{2\pi}|u^-(a+\rho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta<+\infty$$

依 u 在 K 上有界，得出结论。

定理11.28 若Ω 为C 内的开集、u 为Ω 的上半连续函数，且其在 Ω 的任意连通分量上不恒为 $-\infty$，则 u 在 Ω 上次调和当且仅当它适合：对任何 $a\in\Omega$，存在 $R_0=R_0(a)>0$，有

$$u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

对 $0<\rho<R_0(a)$ 成立。

证明：假定 Ω 连通。

一方面，取 u 为次调和，而 $K=\{z\in C\mid |z-a|\leqslant R_0\}\subset\Omega$；命 $\{u_k\}$ 是 K 上的递减趋近于 u 的连续函数序列，且对 $z\in\mathring{K}$、$0<\rho<R_0$，

$$h_k(z)=\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

这样h_k 在K 上连续又在$\mathring{K}$上调和，$h_k(z)=u_k(z)\geqslant u(z)$对$z\in\partial K$ 成立，因此 $u(z)\leqslant h_k(z)\qquad(z\in K)$，

$$u(z)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}h_k(z)=\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta\qquad(z\in\mathring{K})$$

当 $z=a$ 时

$$P_{a\rho}(a,\theta)=\frac{1}{2\pi} \qquad u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

另一方面，由定义11.14、定理11.25知，当u符合定理条件时极大值原理对u成立。

设$U\overset{*}{\subset}\Omega$、$u(z_0)>\sup\limits_{z\in\partial U}U(z)\quad(z_0\in U)$，得

$$\sup_{z\in U}u(z)>\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta)$$

因为u上半连续，所以存在$a\in\overline{U}$使$u(a)=\sup\limits_{z\in U}u(z)$。显见，从$z\notin\partial U$知$a\in U$。

如果定理条件正确，那么u在U的包括a的连通分量V上为常数；这是不可能的，因为

$$u(a)>\sup_{\zeta\in\partial U}u(\zeta)\geqslant\sup_{\zeta\in\partial V}u(\zeta)$$

取$E=\{z\in V\mid u(z)=u(a)\}$，于是$E$非空并由于$u$上半连续使$E$是闭的，当然$u(a)>-\infty$。再取$b\in E$、$R_0=R_0(b)>0$使$\{z\in C\mid|z-b|\leqslant R_0\}\subset V$与

$$u(a)=u(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(b+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

对$0<\rho\leqslant R_0$成立。当$u(b+\rho e^{i\theta_0})\leqslant u(a)-\varepsilon(\varepsilon>0)$时

$$u(b+\rho e^{i\theta})<u(a)-\frac{1}{2}\varepsilon$$

对$[0,2\pi]$中的一个非空开子集I中的θ成立。若u代表直线上的勒贝格测度m，则

$$u(a)=u(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}m\{[0,2\pi]-I\}u(a)+\frac{1}{2\pi}m(I)\left\{u(a)-\frac{1}{2}\varepsilon\right\}<u(a)$$

产生矛盾。这样$u(b+\rho e^{i\theta})=u(a)$对任何$\theta\in[0,2\pi]$成立。

【例 11.1】 设u_1、u_2次调和，对于λ_1、$\lambda_2\geqslant0$有$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$也是次调和。

【例 11.2】 若u_1、u_2次调和，则$u=\max(u_1,u_2)$也是次调和的。

证明:因为$a\in\Omega, u(a)=u_j(a)\quad (j=1,2,\cdots)$,所以

$$u(a)=u_j(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_j(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

对充分小的ρ成立。

【例11.3】 若$\{u_\alpha\}$为Ω内的次调和函数族,函数

$$z\to u(z)=\sup_\alpha u_\alpha(z)$$

在Ω内上半连续,则u是次调和的。

【例11.4】 设u在Ω内次调和,对于任何$a\in\Omega$有

$$u(a)=\overline{\lim_{z\to a}}u(z)\qquad(z\neq a)$$

证明:取$l=\overline{\lim\limits_{z\to a}}u(z)\quad(z\neq a)$。由于$u$上半连续,因此$l\leqslant u(a)$。当$l<u(a)$时$u(a+\rho e^{i\theta})<l'\ (l<l'<u(a))$,对充分小的$\rho\neq0$成立,导致矛盾。

【例11.5】 若u为连续函数且u、$-u$为次调和,则u是调和的。

证明:对所有$a\in\Omega$,有

$$u(z)=\int_0^{2\pi}P_{a\rho}(z,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

对$|z-a|<\rho$成立,而ρ为充分小的正数。

【例11.6】 若u为连续函数且对每个$a\in\Omega$存在$R_0(a)>0$,使对$0<\rho<R_0(a)$有

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

则u是调和的。

实际上,u、$-u$均次调和。

【例11.7】 若对Ω的每个点均有一个邻域使函数u在其上为次调和的,则u在Ω上为次调和的。

定理11.29 如果u为开集$\Omega\subset C$上有二次(阶)连续导数的实值函数,则u为次调和当且仅当$\nabla^2u>0$在Ω内处处成立。

证明:一方面,设$\nabla^2u\geqslant0$在Ω上处处成立。当h为在$U\overset{*}{\subset}\Omega$上的调和函数时在$U$上有

$$\nabla^2(u-h)=\nabla^2 u\geqslant 0$$

应用定理11.24,极大值原理对$u-h$成立。依定义11.14知u为次调和的。

另一方面,取u为次调和,又$\nabla^2 u(a)<0(a\in\Omega)$,于是有$a$的一个开邻域$U$,使$\nabla^2 u(z)<0$对所有$z\in U$成立。由上述证明,$-u$在$U$上次调和,从例11.5知$u$在$U$上调和,所以$\nabla^2 u(a)=0$,出现矛盾。

定理11.30 若$\Omega=\{z\in C\mid 0<|z|<R_0,R_0>0\}$、$f$在$\Omega$上全纯且不恒为零,对$0<r<R_0$置

$$M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$$

则$\log M(r)$为$\log r$的凸函数,即$\log M(et)$为t的凸函数。

证明:取$u(z)=\sup\limits_{\alpha\in R}\log|f(ze^{i\alpha})|$,有$u$在$\Omega$上连续且$u(z)=\log M(|z|)$。依定理11.28,$u$在$\Omega$上次调和。

对r_0、$r_1(0<r_0<R_0)$,设

$$\log M(r)\leqslant l(\log r)$$

式中$l(t)=\alpha t+\beta$。为此证明上式对$r_0<r<r_1$成立。现在$u(z)\leqslant h(z)$对∂U成立。$U=\{z\in\Omega\mid r_0<|z|<r_1\}$,这里$h(z)=\alpha\log|r|+\beta$在$\Omega$内调和;因为$u$次调和,这个不等式在$U$内成立,所以定理成立。

当然该结果可表达成

$$\mu(r)\leqslant M^{\eta}(r_0)M^{1-\eta}(r_1)\qquad (r_0<r<r_1)$$

其中$\eta=\dfrac{\log r_1-\log r}{\log r_1-\log r_0}$。

定理11.31 设$D=\{z\in C\mid |z|<R_0,R_0>0\}$、$\{u_k\}$为$D$内的次调和函数序列。若满足条件:

(1) 存在$M>0$使$u_k\leqslant M$对所有$z(\in D)$及k成立;

(2) 对所有z适合$|z|=\rho<R_0$有$\lim\limits_{k\to\infty}u_k(z)\leqslant\mu$;

则对$r<\rho$以及$\mu_k=\mu_k(r)=\sup\limits_{k\to\infty}u_k(z)$,有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\mu_k\leqslant\mu$$

特别是当(2)对任何$z\in D$成立时上述论断对$r<R_0$成立。

证明:设$\varepsilon>0$,有$E\subset[0,2\pi]$,勒贝格测度$m(E)<\varepsilon$及k_0,使当

$\theta\notin E$、$k\geqslant k_0$ 时 $u_k(\rho e^{i\theta})<\mu+\varepsilon$。事实上，令 $E_k=\bigcup\limits_{l\geqslant k}\{\theta\in[0,2\pi]\mid u_l(\rho e^{i\theta})\geqslant\mu+\varepsilon\}$，从 $\lim\limits_{k\to\infty}u_k(z)\leqslant\mu$ 对 $|z|=\rho$ 成立，存在 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\varnothing$。现有 $E_k\supset E_{k+1}$，于是 k_0 使 $m(E_{k_0})<\varepsilon$。命 $E=E_{k_0}$。显然对这样得到的 E、k_0 符合上述要求。

对 $|z|\leqslant r<\rho$，有

$$u_k(z)\leqslant\int_0^{2\pi}P_{o\rho}(z,\theta)u_k(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

如果 $C^*=\sup P_{o\rho}(z,\theta)$，而 $\theta\in[0,2\pi]$、$|z|\leqslant r$、$E'=[0,2\pi]\setminus E$，那么对 $k\geqslant k$。

$$u_k(z)\leqslant C^*\int_E u_k(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta+\int_{E'}P_{o\rho}(z,\theta)u_k(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant MC^*m(E)+\int_{E'}P_{o\rho}(z,\theta)(\mu+\varepsilon)\mathrm{d}\theta\leqslant MC^*\varepsilon+(\mu+\varepsilon)$$

上式使用了

$$\int_{E'}P_{o\rho}(z,\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{2\pi}P_{o\rho}(z,\theta)\mathrm{d}\theta=1$$

故 $\mu_k(r)\leqslant MC^*\varepsilon+\mu+\varepsilon$。

取开集 $\Omega\subset C^n$，又 a_1、a_2、…、$a_n\in C$；今以 Ω_{fa} 表示 C 内的开集 $\{z\in C\mid(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)\in\Omega\}$，对 Ω 上任意函数 f，用 f_{ja} 表示 Ω_{ja} 上定义的函数

$$f_{ja}(z)=f(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)$$

定理 11.32 若 f 为在 Ω 上定义的函数，且对任意 a_1、a_2、…、$a_n\in C$ 和任意 $j\in[1,n]$，函数 f_{ja} 在 Ω_{ja} 上全纯，则 f 在 Ω 上全纯。

当然可取 $\Omega=\{z\in C^n\mid |z_j|<R_0,R_0>0\}$；定理 11.32 也称为对每个变量分别解析的 Hartogs 定理。

定理 11.33 设 Ω 为上面所定义的多圆柱、f 满足定理 11.32 的条件。若 f 在 Ω 上有界，则 f 在 Ω 上全纯。

证明：考虑 f 在 $|\zeta_j|=\rho<R_0$ 的拓扑积上可测性，当 $n=1$ 时 f 连续、可测；假定对 $n-1$ 维已证明 f 可测。取 θ_1、θ_2、…、θ_j 是在圆周上的

分点，而$\theta_1=\theta_p$且$\theta_j\theta_{j-1}$的弧长小于ε，当ζ_1在弧$\theta_j\theta_{j+1}$之内时函数

$$f_\varepsilon(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=f(\theta_j,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$$

这里的弧$\theta_j\theta_{j+1}$右端是开的、左端是闭的。对固定的ζ_2、…、ζ_n，f为ζ_1的连续函数，所以f_ε在每个点均收敛于$f(\zeta)$。依归纳法假定f_ε可测知f也可测。

设$|f(z)|\leqslant M$、$0<\rho<R_0$，将柯西公式用于$n=1$的情况，当$|z_j|<R_0(j=1,2,\cdots,n-1)$、$|z_n|<\rho$时

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=\rho}\frac{f(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n)}{\zeta_n-z_n}\mathrm{d}^n\zeta_n$$

对于固定的z_1、z_2、…、z_{n-1}，$f(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},\zeta_n)$在圆盘内全纯。重复此过程，对$|z_j|<\rho(j=1,2,\cdots,n)$得

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta|=\rho}\prod_j(\zeta_j-z_j)^{-1}f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)\mathrm{d}\zeta$$

式中$\int_{|\zeta|=\rho}A\mathrm{d}^n\zeta=\int_{|\zeta_n|=\rho}\mathrm{d}\zeta_n\int_{|\zeta_{n-1}|=\rho}\mathrm{d}\zeta_{n-1}\cdots\int_{|\zeta_1|=\rho}A\mathrm{d}\zeta_1$。当$|z_j|\leqslant r<\rho$、$|\zeta_j|=\rho$时

$$\prod_j(\zeta_j-z_j)^{-1}=\sum_\alpha\frac{z^\alpha}{\zeta_1^{\alpha_1+1}\zeta_2^{\alpha_2+1}\cdots\zeta_n^{\alpha_n+1}}\qquad(\alpha\in N^n)$$

此级数对$|\zeta_j|=\rho$、$|z_j|\leqslant r<\rho$为一致收敛。由于f有界、可测，因此在这个级数上乘以f并逐项积分。对于$|z_j|\leqslant r<\rho$，

$$f(z)=\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha\qquad(\alpha\in N^n)$$

$$c_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta|=\rho}f(\zeta)\prod_j(\zeta^{\alpha_j+1})^{-1}\mathrm{d}^n\zeta$$

注意$|c_\alpha|\leqslant\dfrac{M}{\rho^{|\alpha|}}$，推知在$|z_j|\leqslant r$上该级数一致收敛于$f$。

定理 11.34 若开集$W\subset R^n$、$\{W_p\}_{p=1,2,\cdots}$为W的开稠子集的序列，则$A=\bigcap_{p=1}^{\infty}W_p$在$W$中稠。

证明：设$U_0\subset W$为非空开子集，$V_0\overset{*}{\subset}U$且V_0仍为非空开集，则$U_1=V_0\cap W_1$也是非空集。因为W_1是稠开集，取V_1符合$V_1\overset{*}{\subset}U_1$

的非空集，对 p 进行归纳，设 $U_p=U_{p-1}\cap W_p$ 而 V_p 为 U_p 的非空开集并 $V_p\overset{*}{\subset}U_p$，所以 $\overline{V}_p\subset V_{p-1}$，也就是 $\bigcap_p V_p=\bigcap_p \overline{V}_p$。

因为每个 $\overline{V}_p$ 为非空紧致集、$\overline{V}_p\subset\overline{V}_{p-1}$，所以 $\bigcap_p V_p\neq\varnothing$。显见 $\bigcap_p V_p\subset(\bigcap_p W_p)\cap U_0$。$U_0$ 为任意开集，即 A 在 W 中稠。

定理11.34 对 W 为任意完备度量空间都成立。

定理 11.35 设 $\Omega=\{z\in C^n \mid |z_j|<R_0\}$、$\rho<R_0$ 且定义在 Ω 上的函数 f 满足定理11.32 的条件；对固定的 $a_n(|a_n|<R_0)$，函数

$$(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})\rightarrow f(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},a_n)$$

在 $|z_j|<R_0(j=1,2,\cdots,n-1)$ 上全纯，令

$$M(z')=\sup_{|a_n|\leqslant\rho}|f(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},a_n)|$$

式中 $z'=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})$。则存在开稠集 $U'\subset\Omega'$，$\Omega'=\{z'\in C^{n-1}\mid |z_j|<R_0;j=1,2,\cdots,n-1\}$ 使 $M(z')$ 在 U' 的任意紧致子集上有界。

利用定理11.33、定理11.34、定理11.35 可以证明定理11.32。

11.3.2 次调和函数例外集

定理 11.36 设 Ω 为 C 内的连通开集、s 为在 Ω 上的次调和函数。若闭集 $A=\{x\in\Omega\mid s(x)=-\infty\}$，$u$ 为 Ω 上的连续函数且在 $\Omega\backslash A$ 上次调和，则 u 在 Ω 上次调和。

证明：由于 s 在 Ω 的紧致子集上有界，因此可以 $s-c$ 替代 s（c 为常数）。不妨取 $s\leqslant 0$ 在 Ω 上成立、$\varepsilon>0$，于是 $u+\varepsilon s$ 在 Ω 上次调和。实际上，A 的点满足定理11.28 的条件，但在 A 外 $u+\varepsilon s$ 在 $\Omega\backslash A$ 上次调和，定理11.28 的条件也可满足。当 $a\in\Omega$、$\{z \mid |z-a|\leqslant R_0\}\subset\Omega$ 且

$$h(z)=\int_0^{2\pi}P_{aR_0}(z,\theta)u(a+R_0e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

时，依定理11.25 知 $u+\varepsilon s\leqslant h$ 对 $|z-a|=R_0$ 成立。这样在 $|z-a|\leqslant R_0$ 内有 $u+\varepsilon s\leqslant h$；对 $\varepsilon\rightarrow 0$ 和 $|z-a|\leqslant R_0(z\notin A)$，

$$u(z)\leqslant h(z)$$

依定理11.27，$\Omega\backslash A$ 在 Ω 上稠。从 u、h 均连续，推出对 $|z-a|\leqslant R_0$，

$$u(z)\leqslant h(z)$$

于是u是次调和的。

定理11.37 设Ω、s、A符合定理11.36假定。如果u为$\Omega\setminus A$的有界连续次调和函数,那么在Ω上存在次调和函数V使$V\Big|_{\Omega\setminus A}=u$。

证明:在A上定义

$$V(a)=\overline{\lim_{z\to a}}u(z)\qquad (a\in A、z\notin A)$$

在$z\in\Omega\setminus A$上命$V(z)=u(z)$。取$R_0>0$,且

$$\{z\mid |z-a|<R_0\}\subset\Omega$$

利用定理11.27知集合$\{\theta\in[0,2\pi]\mid s(a+R_0e^{i\theta})=-\infty\}$的测度为零。记

$$h(z)=\int_0^{2\pi}P_{aR_0}(z,\theta)u(a+R_0e^{i\theta})\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}P_{aR_0}(z,\theta)V(a+R_0e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

类似于定理11.36的证明,h在$|z-a|<R_0$内调和而$V-h+\varepsilon s$在$|z-a|<R_0$内次调和。当$|\zeta-a|=R_0$时

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}(V-h+\varepsilon s)\leqslant 0$$

推出$V-h+\varepsilon s\leqslant 0$在$|z-a|<R_0$内成立。故取$\varepsilon\to 0$,对$|z-a|<R_0(z\notin A)$,有

$$u(z)\leqslant h(z)$$

根据V的定义,$V(z)\leqslant h(z)$、$|z-a|<R_0$表明V是次调和的。

显然,若s、A的定义如同定理11.37,则在$\Omega\setminus A$上任意有界调和函数存在唯一的在Ω上的调和扩充。

11.4 Hartogs 定理

这里讨论全纯函数奇点的Hartogs定理。

定义11.15 设开集$\Omega\subset C^n$、$A\subset\Omega$。称A为解析集,如果对$a\in\Omega$存在a的一个邻域U及有限多个U上的全纯函数f_1、f_2、…、f_p使$A\cap U=\{f_1(z)=f_2(z)=\cdots=f_p(z)=0\}$。

定理11.38 若Ω连通、A为Ω内的解析子集,则

(1) A在Ω内是闭的;

(2) 当 $A\neq\Omega$ 时，$\Omega\setminus A$ 在 Ω 内是稠的；

(3) $\Omega\setminus A$ 连通。

证明：(1)由定义知对任何 $a\in\Omega$ 有一个邻域 U，使 $U\cap A$ 在 U 内是闭的，即 A 是闭的。

(2) 令当定理11.38(2)不成立时 $B=\mathring{A}=\varnothing$。为此证明 B 是 Ω 内的闭集。从 B 是开的、Ω 是连通的导出 $A=\Omega$，矛盾。

设 $a\in\overline{B}$，U 在 Ω 内是 a 的一个连通开邻域，取 f_1、f_2、…、f_p 在 U 内全纯，且

$$A\cap U=\{x\in U\mid f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0\}$$

于是 f_j 在 $B\cap U$ 上恒为零。利用解析开拓原理，在 U 上 $f_j\equiv0$。推出 $U\subset A$、$U\subset\mathring{A}=B$；特别是对 $a\in B$，$B=\overline{B}$。

(3) 证明(*)

(*)对任意 $a\in\Omega$，存在一个连通邻域 U 使 $U\setminus A$ 连通。

事实上，如果(*)成立，而 $\Omega\setminus A=U_1\cup U_2$（$U_j$ 为非空开集）、$U_1\cap U_2\neq\varnothing$；依(2)，$\Omega=\overline{\Omega\setminus A}=\overline{U}_1\cup\overline{U}_2$，那么从 Ω 连通性知 $\overline{U}_1\cap\overline{U}_2=\varnothing$。设 U 为 a 的一个邻域且 $U\setminus A$ 连通，于是

$$U\setminus A=[U\cap(U_1\setminus A)]\cup[U\cap(U_1\setminus A)]$$

不可能连通，除非在 $U\cap U_1$、$U\cap U_2$ 之中有一个包括在 A 中，由(2)，这是不可能的。

关于(*)，设 U 为 a 的一个凸邻域，又存在 U 内全纯函数 f_1、f_2、…、f_p，使

$$U\cap A=\{x\in U\mid f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0\}$$

取 x_0、$x_1\in U\setminus A$，$V=\{\lambda\in C\mid\lambda x_0+(1-\lambda)x_1\in U\}$，表明 V 是 C 内的凸集，在 V 上至少有一个

$$g_j(x)=f_j(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)\neq0$$

即

$$A'=\{\lambda\in C\mid\lambda x_0+(1-\lambda)x_1\in U\cap A\}$$

在 V 内离散，推知当 $V\setminus A'$ 连通并 0、$1\in V\setminus A'$ 时 $t\to\gamma(t)$ 是 $V\setminus A'$ 内连接从0到1的弧，

$$t\to\gamma(t)x_0+[1-\gamma(t)]x_1$$

为$U\setminus A$内连接从x_1到x_0的弧。

定理 11.39 若开集$\Omega\subset C^n$、A为解析集使$\Omega\setminus A$在Ω内稠；取函数f在$\Omega\setminus A$上全纯，对任何$a\in A$，存在Ω内a的一个邻域U，使$f|_{U\setminus A}$有界，则在Ω上有唯一的全纯函数下适合$F\Big|_{\Omega\setminus A}=f$。

证明：唯一性是显然的。

对$n=1$，只需证明f在$\{z\mid 0<|z|<\rho\}$内全纯有界。这时f在$|z|<\rho$内连续。令

$$f(z)=\sum_{v=-\infty}^{+\infty}a_v z^v$$

$$a_v=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{v+1}}\mathrm{d}\nu\quad(0<r<\rho)$$

对于$v<0$，因为f有界，所以当$\gamma\to 0$时上述积分趋近于零。注意到a与r无关，当$v<0$时$a_v=0$时即证。

对于一般情况，设$a\in A$、V为a的一个连通邻域，$f\Big|_{V\setminus\Omega}$全纯有界，在$V$上存在全纯函数$f_1$、$f_2$、…、$f_p$，得

$$A\cap V=\{x\in V\mid f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0\}$$

不妨设$h=f_1\neq 0$，在C^n内对一个坐标进行线性变换，取$a=0$并在$z_n=0$的一个邻域内$h(0,\cdots,0,z_n)\neq 0$，则有$\delta>0$，当$0<|z_n|\leqslant\delta$时$h(0,\cdots,0,z_n)\neq 0$，现以z'表示$(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})$；设$\varepsilon>0$，对$|z'|\leqslant\varepsilon$、$|z_n|=\delta$，存在$h(z',z_n)\neq 0$。考虑

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\delta}\frac{f(z',t)}{t-z_n}\mathrm{d}t$$

对$|z'|\leqslant\varepsilon$、$|t|=\delta$，有点$(z',t)\in V\setminus A$，所以g在$|z'|<\varepsilon$、$|z_n|<\delta$内全纯。进一步，对固定z'、$|z'|<\varepsilon$，函数$t\to f(z',t)$有一个在$|t|<\delta$上的全纯扩充，这是由于定理在$n=1$的情况，因此对$z\in V\setminus A$，$|z'|<\varepsilon$、$|z_n|<\delta$应用柯西公式得，

$$g(z)=f(z)$$

表明f可连续扩充到A的任意一点的某个邻域内，从扩充的唯一性知定理正确。

定理 11.40 设U、Ω为C^n内的两个开集，且$U\subset\Omega$，f在U内

全纯。若对$a\in(\partial U)\cap\Omega$，有

$$\lim_{z\to a}f(z)=0 \qquad (z\in U)$$

记

$$F(z)=\begin{cases}f(z) & (\text{当}z\in U\text{时})\\ 0 & (\text{当}z\in\Omega\setminus U\text{时})\end{cases}$$

则$F(z)$在Ω内全纯。

定理 11.41 设f为开集$\Omega\subset C^n$上的连续函数，

$$U=\{z\in\Omega\mid f(z)\neq 0\}$$

若f在U上全纯，则f在Ω上全纯。

证明：只讨论$n=1$即可。因为假定$n=1$时定理成立，考虑a_1、a_2、…、$a_n\in C$，所以函数

$$z_j\to f(a_1,\cdots,a_{j-1},z_j,a_j,\cdots,a_n)$$

在C的开集内满足定理11.41的条件，它是全纯的。由定理11.33知f在Ω上全纯。

由于此定理是局部的，因此可设Ω在C^1内连通。取$f\neq 0$、$s(z)=\log|f(z)|$，于是s在Ω内次调和。依定理11.38的(*)，在

$$A=\{z\in\Omega\mid F(z)=0\}=\{z\in\Omega\mid s(z)=-\infty\}$$

内的点显然满足。在$\Omega\setminus A$上s调和且(*)也是满足的。进一步，$f|_{\Omega\setminus A}$是全纯的，也是调和的，从定理11.36知f在Ω上是闭的，尤其是f在Ω上连续是可证的。依在$\Omega\setminus A$上$\dfrac{\partial f}{\partial g}=0$，而$\Omega\setminus A$在$\Omega$中是稠的，表明在$\Omega$上$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0$，即$f$在$\Omega$上全纯。

实际上，定理11.40与定理11.41是等价的。

定义 11.16 (1) 定义在子集$S\subset C^n$上的函数称为在S上全纯，如果它是一个在开集$U\supset S$上的全纯函数在S上的限制。

(2) 设Ω为开集，$A\subset\Omega$。当f在$\Omega\setminus A$上全纯时称f在点$a\in A$处是奇异的，如果没有在a的某个邻域U上的全纯函数，其在$U\setminus A$上的限制为$f\Big|_{U\setminus A}$。

Hartogs 连续性定理 设连通开集$\Omega\subset C^n$、$Q=\{w\in C\mid r<$

$|w|<R_0, 0\leqslant r<R_0\}$，$f$ 在$\Omega\times Q$ 上全纯。如果点$a\in\Omega$ 使f 可以全纯拓展到$\{a\}\times D$ 的一个邻域，而 $D=\{w\in C \mid |w|<R_0\}$，那么 f 可以全纯拓展到$\Omega\times D$。

证明：设 $f(z,w) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v(z)w^v$ 为f 的罗朗展开，它在$\Omega\times Q$ 的紧致子集上一致收敛。$a_v(z)$均为Ω 上的全纯函数。若对$r<\rho<R_0$，存在$\varepsilon>0$ 使$f(z,w)$可以在$\{(z,w) \mid |z-a|<\varepsilon, |w|<\rho\}$上扩充为全纯函数$F(z,w)$，则对$v<0$、$a_v=0$，在$|z-a|<\varepsilon$ 内成立。依解析开拓原理，当$v<0$ 时$a_v\equiv 0$ 时在Ω 上成立，即

$$f(z,w) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(z)w^v \qquad (z,w)\in\Omega\times Q$$

上式右边的级数在$\Omega\times D$ 的紧致子集上是一致收敛的。

依据Hartogs 连续性定理可以断言：设f 在$C^n\times C$ 内的集合$z=0$、$0<|w|<R_0$ 上全纯，而$(0,0)$为f 的奇异点。若$\delta>0$ 为充分小的数，则有$\varepsilon>0$ 使对任意z_0、$|z_0|<\varepsilon$，f 不能在$\{z_0\}\times D$ 的任意邻域内全纯扩充，$D=\{w\in C \mid |w|<\delta\}$。

定理 11.42 设Ω 为C^n 内的连通开集、映射$\varphi:\Omega\to C$，对所有$z\in\Omega$ 都有$|\varphi(z)|<R_0$；$U=\Omega\times D$、$D=\{w\in C \mid |w|<R_0\}$ 且 $\Gamma=\{(z,w)\in U \mid \varphi(z)=w\}$。如果$f$ 在$U\setminus\Gamma$ 上全纯，在Γ 的每个点均奇异，那么φ是z 的全纯函数。

定理 11.43 若Ω、φ、f、R_0、D 如定理11.42 所述，则φ连续。

证明：取$z_0\in\Omega$、$\varphi(z_0)=w_0$；对$\varepsilon>0$，依Hartogs 连续性定理，存在$\delta>0$ 使对$|z-z_0|<\delta$，f 不能全纯扩充到$\{z\}\times\{|w-w_0|<\varepsilon\}$。对于$|z-z_0|<\delta$，$f$ 在$\{z\}\times D\setminus\{\varphi(z)\}$上全纯，推出$|\varphi(z)-w_0|<\varepsilon$，也就是$\varphi$连续。

设开集$\Omega\subset C$，$\{f_v\}$ $(v=0,1,\cdots)$为在Ω 上的全纯函数列。现考虑级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)w^\nu$$

并假定该级数在$\Omega\times\{0\}$的一个邻域内的紧致子集上一致收敛。

Hartogs 半径定义上面级数的Hartogs 半径为映射 $R_0:\Omega\to R^+$，其 $R_0(z_0)=\sup\{|w|\ \sum_{v=0}^{\infty}f_v(z)w^v$ 在 (z_0,w) 的邻域内一致收敛\}；级数在 $\Omega\times\{0\}$ 的一个邻域内一致收敛，显然有 $R_0(z_0)>0$ 对任何 $z_0\in\Omega$ 成立。

定理 11.44 若 $R_0(z)\neq+\infty$，则 $-\log R_0(z)$ 在 Ω 内次调和。

事实上，先表明 $-\log R_0(z)$ 上半连续。取 $r<R_0(z_0)$，有 $\delta>0$ 使这个级数在集 $|z-z_0|\leqslant\delta$、$|w|=r$ 的一个邻域上一致收敛，于是在 $|z-z_0|\leqslant\delta$、$|w|\leqslant r$ 上一致收敛。当 $|z-z_0|<\delta$ 时 $R_0(z)\geqslant r$，即 $\lim\limits_{z\to z_0}R_0(z)\geqslant R_0(z_0)$。

设 $K=\{z\in C\mid |z-z_0|\leqslant\rho\}\subset\Omega$、$h$ 在 K 上连续、在 $\mathring{K}$ 上调和，当 $|z-z_0|=\rho$ 时

$$-\log R_0(z)\leqslant h(z)$$

为说明上式对 $|z-z_0|<\rho$ 的 z 也成立。从级数 $\sum_{v=0}^{\infty}f_v(z)w^v$ 对 $|z-z_0|=\rho$、$|w|<R_0(z)$ 收敛，当 $|z-z_0|=\rho$ 时

$$\overline{\lim_{v\to\infty}}|f_v(z)|^{\frac{1}{v}}\leqslant\frac{1}{R_0(z)}\leqslant e^{h(z)}$$

另一方面 $R_0(z)$ 在 K 上有下界，于是 $\sum_{v=0}^{\infty}f_v(z)w^v$ 在 $K\times\{|w|\leqslant\eta,\ \eta>0\}$ 的集上一致收敛。对

$$|f_v(z)|\eta^v\leqslant M \qquad (z\in K;v=0,1,2,\cdots)$$

式中 M 为正常数。依定理 11.31，

$$\overline{\lim_{v\to\infty}}\alpha_v(r)\leqslant 0$$

其中

$$\alpha_v(r)=\sup_{|z-z_0|\leqslant r}\left\{\frac{1}{v}\log|f_v(z)|-h(z)\right\} \qquad (0<r<\rho)$$

当 $\varepsilon>0$ 时

$$|f_v(z)|^{\frac{1}{v}}\leqslant\exp[h(z)+\varepsilon]$$

对 $|z-z_0|\leqslant r$、$v>v_0(\varepsilon)$ 一致成立。当 $|z-z_0|<\rho$ 且 $|w|<\exp[-h(z)-\varepsilon]$ 时级数 $\sum_{v=0}^{\infty}f_v(z)w^v$ 在 (z,w) 的邻域内一致收敛，即 $R_0(z)\geqslant e^{-h(z)}$。对于 $|z-z_0|<\rho$，$-\log R_0(z)\leqslant h(z)$。

今考虑 $n=1$ 时的定理11.43。不妨取 $0\in\Omega\subset C$ 及 $\varphi(0)=0$，并进一步表明 φ 在 $z=0$ 的邻域内全纯。设 $0<\eta<\frac{1}{2}R_0$，当 $|z|<\delta$ 时 $|\varphi(z)|<\eta$。命 $w_0\in C$、$\eta<|w_0|<R_0-\eta$，当 $|z|<\delta$ 时 f 在 (z,w_0) 的一个邻域内全纯；记级数

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)(w-w_0)^k$$

对于 $|w-w_0|<|\varphi(z)-w_0|$，级数 $f(z,w)$ 在 (z,w) 的一个邻域内一致收敛，因为对这样的 (z,w)，f 在某一个邻域内全纯，所以对该级数的Hartogs 半径 $R_0(z)$ 适合

$$R_0(z)\geqslant|\varphi(z)-w_0|$$

如果某个 z_0、$|z_0|<\delta$ 使 $R_0(z_0)>|\varphi(z_0)-w_0|$，那么由 $R_0(z)$ 的下半连续性知，$R_0(z)>\rho$ 对所有 z_0 邻近的 z 成立；注意 ρ 符合 $|\varphi(z_0)-w_0|<\rho<R_0(z_0)$，表明对 z_0 邻域的 z 与 $|w-w_0|<\rho$，级数 $f(z,w)$ 一致收敛。从 $|\varphi(z_0)-w_0|<\rho$，f 在 $(z_0,\varphi(z_0))$ 的一个邻域内将存在一个解析扩充。但依原来假设，f 在 Γ 上奇异，这是不可能的。

定理 11.45 当 $|z|<\delta$ 时级数 $f(z,w)$ 的Hartogs 半径为

$$R_0(z)=|\varphi(z)-w_0|$$

定理 11.46 如果 δ、η、φ 定义如上，那么

$$z\to\log|\varphi(z)-w_0|$$

在 $|z|<\delta$ 内调和；对任意 w_0 其满足 $\eta<|w_0|<R_0-\eta$。

证明：设 $u(z,w_0)=-\log|\varphi(z)-w_0|$，利用定理11.43、定理11.44，$u(z,w_0)$ 为在 $|z|<\delta$ 内的对 z 次调和的函数。对 $\rho<\delta-|z|$，

$$u(z,w_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+\rho e^{i\theta},w_0)\mathrm{d}\theta$$

对固定的$r\in(\eta,R-\eta)$，取$w_0=re^{i\theta}$，推出对$\varphi\in[0,2\pi]$，$u(z,w_0)$式成立。今将u对φ从0到2π积分，对$|\zeta|<\delta$，依$|\varphi(\zeta)|<\eta$，当$|\alpha|<r$时

$$\int_0^{2\pi}\log|\alpha-re^{i\varphi}|\mathrm{d}\varphi=2\pi\log r$$

故

$$\int_0^{2\pi}u(\zeta,re^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\zeta)-re^{i\varphi}|\mathrm{d}\varphi=2\pi\log\frac{1}{r}$$

从而

$$\int_0^{2\pi}u(z,re^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi=2\pi\log\frac{1}{r}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}u(z+\rho e^{i\theta},re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

注意到u的连续性，上式得

$$u(z,w_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+\rho e^{i\theta},w_0)\mathrm{d}\theta$$

式中$\eta<|w_0|<R_0-\eta$、$\rho<\delta-|z|$；依定理11.28就得本定理。

定理11.47 若$\log|\varphi(z)-w|$对任何w及$\eta<|w|<R-\eta$均为z的调和函数，则φ(或$\overline{\varphi}$)是z的全纯函数。

证明：因为$\log|\varphi(z)-w|$调和，所以其为实解析，是C^∞的。当$w=re^{i\lambda}$、$r\in(\eta,R-\eta)$、$\lambda\in[0,2\pi]$时

$$|\varphi(z)-w|^2=\exp[2\log|\varphi(z)-w|]$$

也是C^∞的，表明

$$\overline{w}\varphi+w\overline{\varphi}=\frac{1}{2}[|\varphi(z)+w|^2-|\varphi(z)-w|^2]$$

是C^∞的。取$w=r$与$w=ir$，推出$\varphi+\overline{\varphi}$、$\varphi-\overline{\varphi}$是$C^\infty$的，也就是$\varphi$、$\overline{\varphi}$为$C^\infty$的。现

$$\begin{aligned}O&=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\log\{[\varphi(z)-w][\varphi(\overline{z})-\overline{w}]\}\\&=\frac{1}{\varphi-w}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}-\frac{1}{(\varphi-w)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}+\\&\quad\frac{1}{\overline{\varphi}-\overline{w}}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial z\partial\overline{z}}-\frac{1}{(\overline{\varphi}-\overline{w})^2}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}}\end{aligned}$$

对所有在一个非空开集的w成立。上式乘以$(\varphi-w)^2(\overline{\varphi}-\overline{w})^2$，再

以 w、$\overline{w}$ 的幂次列出方程，

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}=0$$

第一个等式表明 φ 调和，即实解析；第二个等式表明或 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}$ 在一个非空开集上恒为零。根据解析开拓原理，或 $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}$ 或 $\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}}=\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$ 恒为零。

定理 11.48 若 Ω 为 C^n 内的连通集、$D=\{w\in C\mid |w|<R_0\}$、K 为 D 中的紧致子集、$A\subset\Omega\times K$；又取 $p>0$ 使对 $z\in\Omega$，

$$A_z=\{w\in D\mid(z,w)\in A\}$$

为一个至多有 p 个元素的有限集；又取在 $\Omega\times(D\backslash A)$ 上的全纯函数 f，其在 A 的每个点都是奇异的，则在 Ω 上有全纯函数 φ_1、φ_2、…、$\varphi_q(q\leqslant p)$ 使

$$A=\{(z,w)\in\Omega\times D\mid w^q+\varphi_1(z)w^{q-1}+\cdots+\varphi_q(z)=0\}$$

尤其是 A 为解析集。

证明：设当 z 遍历时 q 为 A_z 的元素个数的极大值；又取 $U\subset\Omega$，对 $z\in U$，A_z 恰好有 q 个元素。可以断言 U 是开的。设 $a\in U$、$A_a=\{w_1,w_2,\cdots,w_q\}$、$\varepsilon<\frac{1}{2}\max\limits_{l\neq j}|w_l-w_j|$，为此证明当 z 在 a 的邻近时 $A_z\cap\{w\in C\mid |w-w_l|<\varepsilon;l=1,2,\cdots,q\}\neq\varnothing$，依假定 A_z 为 f 的形如 (z,w) 的奇异点集，依 Hartogs 连续性定理可推出 $A_z\cap\{w\in C\mid |w-w_l|<\varepsilon;l=1,2,\cdots,q\}$ 非空。

对 $z\in U$，设 $A_z=\{w_1(z),w_2(z),\cdots,w_q(z)\}$；令

$$g(z)=\prod_{l<j}[w_l(z)-w_j(z)]^2$$

表明 $g(z)$ 在 U 上全纯。为此取 $a\in U$、z 为在 a 邻近，设 $\varepsilon<\frac{1}{2}\max\limits_{l\neq j}|w_l(a)-w_j(a)|$，对 l 及 a 邻近 z，取 $w_l(z)$ 为 A_z 的符合 $|w_l(z)-w_l(a)|<\varepsilon$ 的元素。对邻近 a 的 z，应用定理 11.42 于 $w_l(z)$；因此 $w_l(z)$ 对 a 邻近的 z 是全纯的，故 g 在 U 上全纯。

设 $a_v\in U$，$a_v\rightarrow a\in(\partial U)\cap\Omega$。由 $w_l(a_v)\in K$ 知存在一个子序列

$\{v_k\}$ 使 $w_l(a_v) \to w_l \in K(l=1,2,\cdots,q)$。因为 A 是闭的，所以 $(a,w_v)\in A$。从 $a \notin U$，有 $w_l = w_j$ 对某些 $l \neq j$ 成立。由于每个 $w_l(z)$ 在 U 上有界，因此 $g(av_k)\to 0$。当 $k\to\infty$，此点对任意序列 $a_v \to a$ 均成立时 $g(a_v)\to 0$；当 $v\to\infty$ 时利用定理 11.40，在 Ω 上定义的

$$h(z)=\begin{cases} g(z) & z\in U \\ 0 & z\in \Omega\setminus U \end{cases}$$

函数在 Ω 上全纯。进而 $\Omega\setminus U=\{z\in\Omega \mid h(z)=0\}$ 为 Ω 内的解析集。对 $z\in U$，定义

$$P'(z,w)=\prod_{l=1}^{q}[w-w_l(z)]=w^q+\varphi'_1(z)w^{q-1}+\cdots+\varphi'_q(z)$$

式中

$$\varphi'_k(z)=(-1)^k\sum_L w_{l_1}(z)w_{l_2}(z)\cdots w_{l_k}(z)$$

为 $\{w_l(z)\}$ 的 k 次初等对称函数，L 表示 $1\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_k\leqslant q$；由于 $w_l(z)\in K$ 使 φ'_k 在 U 上有界。进一步，φ'_k 在 U 上全纯。依定理 11.39，存在 Ω 上的全纯函数 φ_k，其在 U 上的限制为 φ'_k。

设 $P(z,w)=w^q+\varphi_1(z)w^{q-1}+\cdots+\varphi_q(z)$。如果 $(z,w)\in\Omega\times C$、$P(z,w)=0$，那么 $w\in K$。显见当 $z\in U$ 时 $A_z=\{w\in C \mid P(z,w)=0\}$。从 U 在 Ω 中稠知

$$A\subset\{(z,w)\in\Omega\times C \mid P(z,w)=0\}$$

反之，如果 $(z,w)\in\Omega\times C$、$P(z,w)=0$，那么 $w\in K\subset D$。当 $z_v\to z$、$z_v\in U$ 时 $w_v\in C$、$P(z,w)=0$；且 $w_v\to w$。依 $(z_v,w_v)\in A_{z_v}\subset A$ 和 A 是闭的，$(z,w)\in A$，即

$$A=\{(z,w)\in\Omega\times C \mid P(z,w)=0\}$$

定理 11.49 设 W 为 C^{n+1} 中的开集、$A\subset W$，使

(1) 对任何 $a\in(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})\in W$，有一个邻域 $\Omega\times D$、$\Omega\subset C^n$、$D=\{|w-a_{n+1}|c\rho\}\subset C$，且对 $p>0$，使对任何 $z\in\Omega$，集合 $\{w\in D \mid (z,w)\in A\}$ 至多包括 p 个点；

(2) 若有在 $W\setminus A$ 上的全纯函数 f，其在 A 的每个点均为奇异的，则 A 为 W 的一个解析子集。

参考文献

1 阿尔福斯 L V. 复分析. 上海:上海科学技术出版社,1962

2 梯其玛希 E C. 函数论. 北京:科学出版社,1964

3 林振声. 概周期微分方程与积分流形. 上海:上海科学技术出版社,1986

4 捷波塔辽夫 П Г. 代数函数论. 北京:高等教育出版社,1956

5 中野秀五郎. 巴拿赫空间论. 北京:科学出版社,1960

6 邦德列雅金 Л С. 连续群. 北京:科学出版社,1978

7 郭大钧. 非线性泛函分析. 山东:山东科学技术出版社,1985

8 关肇直. 拓扑空间概论. 北京:科学出版社,1960

9 克拉斯诺西尔斯基 M A 等. 凸函数和奥尔里奇空间. 北京:科学出版社,1962

10 华罗庚. 多复变函数论中的典型域的调和分析. 北京:科学出版社,1958

11 陈志华. 层论及其上同调理论. 上海:同济大学出版社,1997

12 史济怀. 多复变函数论基础. 北京:高等教育出版社,1996

13 严志达. 李群和微分几何. 北京:人民教育出版社,1960

14 狄多涅 J. 典型群的几何学. 北京:科学出版社,1960

15 李国平. 准解析函数论. 武汉:武汉大学出版社,1984